二重経済における失業均衡の存在*

高羅ひとみ †

平成 21 年 7 月 13 日

概 要

インドをはじめとする途上国では次のような特徴があるとされている．つまり，1．農村では低賃金であるが，豊富な労働力を有している．そして，2．農村から高賃金の都市への労働力の流入がある．しかし，3．都市では失業があり，必ずしも都市に流入した労働者が雇用されるとは限らない．さらに，4．農村では低賃金とともに，市場の連結と呼ばれる現象が報告されている．これらの特徴をもつ経済を一般均衡の枠組みで表現し，比較静学を確立することが本論文の目的である．我々は最初の問題を次のように解決する．労働者は都市には失業があることを知っており，その率を知った上で期待効用に従って賃金の高い都市に行くか農村に留まるかを決めるとする．都市の労働市場の均衡を，あらかじめ知られている失業率が結果として現れる失業率と一致することによって，表現する．これによって，失業のある経済でのワルラス法則の成立が保証され，均衡存在の確立に結びつく．さらに，本論文で得る主たる比較静学は，(i) 資本ストックが増加する，あるいは，労働者間の生産効率の差が小さくなると，失業率は下落すること，(ii) 農村における産出増加的な技術改良は，失業率を上昇させる，である．

JEL classification: J64; Q12; O12

Keywords: Urban Unemployment; Labor Migration; Labor Heterogeneity; Interlinkage; Existence of Equilibrium; General Equilibrium Model

*本稿の作成のみならず，日頃よりご指導を頂いている入谷純教授，宮川栄一准教授 (いずれも神戸大学) に心より感謝いたします．また本稿の作成にあたって，加茂知幸准教授 (京都産業大学)，佐藤隆広准教授 (神戸大学) から建設的なコメントを頂きました．ここに記して感謝申し上げます．なお，本稿のありうべき誤謬はすべて筆者の責任に帰するものです．

†657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 2-1 神戸大学大学院経済学研究科博士課程後期課程．*E mail:* hitomik-oura@hotmail.com

1 はじめに

開発途上国では次のような特徴があるとされている．つまり,

特徴 1. 農村では低賃金であるが，豊富な労働力を有している,

特徴 2. 農村から高賃金の都市への労働力の流入がある,

特徴 3. しかし，都市では失業があり，必ずしも都市に流入した労働者が雇用されるとは限らない.

である．これらの特徴は，都市の失業者が多数存在し増加していながら，農村から都市への労働流入が持続ないし増加していることを表している．これは現代のみならず，古くから途上国で観察されてきた事実である (例えば，Harris and Todaro[18])．「失業のあるところに労働者が流入する」という一見したところ逆説的な現象を Harris and Todaro[19] (以下，HT モデル) は，期待仮説を案出することによって説明する．ここで，期待仮説とは，都市の仕事はくじによって配分され，リスク中立的な潜在的移民はそのくじの期待値を計算して，それを農村地域の雇用と比較することである．このとき，労働移動は都市の期待賃金が農村の賃金に等しくなるまで続く．都市では，最低賃金法や労働組合の圧力によって，賃金が人為的に高く保たれているため，均衡で失業が生じる.

この Harris and Todaro による先駆的研究は，その後現代に至るまで，次の点に着目して拡張されてきた[1]．Williamson [27] によれば，HT モデルには (1) 仕事の配分は単純なくじ引きに従う，(2) 都市インフォーマルセクターの労働市場に対する考慮がない，(3) 都市賃金は市場決済水準よりも人為的に高く固定される，などといった重要な仮定がある．これらの仮定の下で上述の失業のあるところに労働者が集まるという結論が導かれるとはいえ，それぞれの仮定は制限的である．その後の議論はこれらの仮定を巡ってなされてきた.

しかしながら，現代に至ってもまだ十分に解決されているとは言えずさらに研究する必要がある点を 2 つ挙げることができる．一つは，より現実的な観点からの指摘である．農村においては，労働の限界生産力と実質賃金が一致するという想定が HT モデルにある．そこでは農村経済において市場メカニズムが機能しているということが前提となっている．この前提には，しかしながら，次の点で疑問が提示されている．確かに，途上国の都市地域と農村地域を比べれば，農村のほうが最低賃金法の効力はより低いし，労働組合が結成される頻度も低い．また，政府が農村失業者に給付金を支払うこともほとんどない．労働力は相対的に同質で，農作業の多くが読み書きのできない非熟練労働者によって担なわれる．その後の農村実態調査は，しかし，こうした現象は農村経済が市場メカニズムによって支配されているということを意味しないという見方を強めている．むしろ，農村経済で，情報は不完全であり，顕著な取引費用が存在する．ともすれば，市場取引が行われないといった事態を伝統的な制度や組織が補っているのだというのが，80 年代以

[1] この分野のサーベイに，例えば，Bardhan and Udry[4]，Bhattacharya[11]，Khan[21] および Williamson [27] がある．Bhattacharya[11] は，理論モデルの広範なサーベイを与えている．Bardhan and Udry[4] と Williamson [27] は開発経済学の視点から，Khan[21] は貿易理論の観点からのサーベイである.

降優勢な捉え方である．しかしながら，こうした農村経済に対する認識の転換は，HT モデル以後の労働移動モデルにおいて，考慮に入れられていない．

もう一つはより技術的であるが重要な課題である．HT モデルは均衡で都市失業が存在するメカニズムについて一つの洞察を与えるが，そもそも均衡が存在するのかという問いには必ずしも解答を与えていない．HT モデルの均衡の存在は自明なものではなく，証明されるべきものである (Khan[21] による) が，この問題を扱った論文は極めて少ない．その理由は HT モデルが不均衡理論であるところにある．個々の労働者が稼ぐ予定の所得が確定しないので，需要関数を求める最大化問題を記述できない．さらに，需要関数を表現できてもバジェットが成立せず，したがってワルラス法則の成立が難しい．これらの事実が HT モデルで均衡の存在を難問にしている．Khan[20] は，HT モデルとその後の Corden and Findlay[15]，Calvo[14] や Stiglitz[26] 等による拡張には，(1) 都市と農村地域間で実質賃金率ではなく，期待賃金率が均等する，(2) 都市賃金率は農村賃金率，都市雇用率，および資本レンタル率の関数である，という特徴があることを指摘している．この 2 つの点で HT とこれにつづくモデルは，ヘクシャー＝オリーン＝サミュエルソンモデルの特徴を持つと捉えている．実際，HT モデルは (2) の関数が定値である場合である．Khan は，HT モデルにおいて均衡が存在しないための十分条件を導出し，均衡に非存在の可能性を指摘している．HT モデルに「労働者が市場の失業確率を所与とし期待所得に基づき行動する一般均衡的枠組み」を付け加えたのが，入谷・角野 [29] である．そこでは，あらかじめ予想している失業確率が実現する失業確率と一致するというナッシュ的な均衡条件を与えている．労働者はどの所得になるか分からないが，失業確率による期待所得を知ることができ，それに基づいて行動すると想定されている．その結果，個人が無数いるので誰かが失業して契約を履行できない場合にも，社会全体ではもとの期待値通りの総所得が実現する．よって，市場全体ではバジェットが成立し，ワルラス法則が成立する．入谷・角野は，この変形された HT モデルにおいて，失業を伴う均衡が存在することを証明している．

我々は HT モデルに残された，上述の，現実的な観点を付け加えること，均衡存在を示すという二課題を解決する．前者には，我々は，

特徴 4. 農村では低賃金とともに，市場の連結 (インターリンケージ) と呼ばれる伝統的な制度がしばしば観察される

という農村地域の特徴をモデルに組み込む．Basu [6] によれば，インターリンケージとは，通常独立した市場で取引されると想定される 2 つ以上の財・サービスが連結されて取引契約が結ばれる現象をいう．よく観察される事例として次の 3 つを挙げることができる．小作人は地主から土地を借りるだけでなく，生産や消費のための信用も得る (Bardhan and Rudra [2])．労働者は雇用主に労働力を提供するだけでなく，賃金を前借りしたりする (Bardhan and Rudra [3])．農民は農産物を販売する際に，生産の運転資金を借りた商人を通じて販売する (Wharton [28])．Bell and Srinivasan[9] は，農業後進州のビハール州では労働と信用取引の連結が広く観察される一方で，農業先進州のパンジャブ州では生産物と信用取引の連結が優勢であることを，インドにおける農村実態調査を通して明らかにしている．さらに，こうした連結取引は，より最近のパンジャブ州にお

ける農村実態調査でも確認されている (Gill [16, 17])．インターリンケージが採用される理論的根拠に関する議論は２つに大別される[2]．１つはインターリンケージを独占者が取引から生じる最大余剰を搾取するための手段であるとみる (Basu [5, 6]，Bardhan [1])．例えば，Basu [6] は，地主が村の独占的貸し手であるとき，独占金利を課すよりも，労働と信用取引を連結させることによって，より多くの余剰を奪うことが可能であることを指摘する．インターリンケージは情報の非対称性を軽減したり，モラルハザードを緩和させる手段であるとする見方もある (Braverman and Stiglitz [13]，Mitra[23]，Braverman and Gausch [12])．例えば，Braverman and Stiglitz [13] は，地主に小作人の投入する努力量や採用する技術の選択が直接観察できないとき，地主は小作人に土地だけでなく消費や生産のための信用も供与することで，地主にとって望ましい努力量を小作人から引き出したり，地主の望む技術を小作人に採用させることが可能となることを示している．

２つ目の課題に関して，我々は次のように解決する．労働者は都市には失業があることを知っており，その率を知った上で，期待効用に従って，賃金の高い都市に行くかどうかを決めるとする．また，農村には土地所有者がいて，独占者として行動すると想定する．すなわち，農村の賃金率と利子率の決定を通じて，つまり労働と信用の市場を連結させることによって，農村での労働人口の確保をすると想定する．これらの２点が HT モデルと大きく異なるところである．均衡はあらかじめ知られている失業率が結果として現れる失業率と一致することによって描かれる．したがって，労働市場の均衡は就業者総数の期待値と総労働需要が一致することによって記述される．さらに，都市における生産技術はレオンチェフ型であると想定する，期待所得ではなく期待効用に基づき労働者は都市へ移動する，そして労働者は生産効率の点で異質であると仮定する．そうすることによって，入谷・角野 [29] よりも容易に，失業を伴う均衡の存在を証明することが可能である．

我々のモデルで得られる主たる結論は，

1． 上の要請を満たす都市での失業を含む均衡が存在する (第 3.2 節，定理 1)，

2． コブ・ダグラス型効用関数をもつ経済において，農村から都市への資本の供給の増加は失業率を下落させる (第 4 節)，

3． コブ・ダグラス型効用関数をもつ経済において，労働者間の生産効率の差が小さくなれば，失業率は下落する (第 4 節)，

4． コブ・ダグラス型効用関数をもつ経済において，農村における産出増加的な技術改良は，失業率を上昇させる (第 4 節).

である．農村地域から都市地域への資本の供給が都市失業を減少させるという結果は，多くの国の歴史的経験と整合的であり，HT モデルや Corden and Findlay[15] では導出できなかった命題である．結論 3 は，労働者間の生産効率の差と都市での失業率の関係を述べている．これは同質の労働者を想定する通常の労働移動モデルからは導き出せない結果であるとともに，将来の実証

[2]この分野の包括的サーベイとして，Bardhan and Udry [4]，Basu [7] および Bell [8] がある．

研究が待たれるところである．HT モデルが都市の失業を緩和する開発戦略として農村開発を重視すべきであるという重要な教訓をもたらしたのとは対称的に，農村における技術進歩がかえって都市における失業を上昇させてしまうという結論 4 は興味深い．

本稿の構成は以下のとおりである．まず，第 2 節では，特徴 1〜4 を合わせもった経済を一般均衡の枠組みで記述する．続く第 3 節では，2 節で記述された経済において，都市での失業を含む均衡が存在することが示される．最後に，労働者と地主の効用関数をコブ・ダグラス型に限定した経済において，外生的なパラメータの変化が都市での失業率に与える影響を考察するのが第 4 節である．

2　モデル

都市と農村の 2 地域を想定する．個人は都市労働者，農業労働者，都市生産者，農村の地主から成る．考察する期間は 1 年である．1 年は 2 つの季節から成る．農村では 1 年に 1 種類の農産物を生産し，第 1 の季節は耕作や種まきなどに，第 2 の季節は収穫や脱穀などに充てられる．第 1 季節の作業にはほとんど労働を必要としないが，第 2 季節の作業にはかなりの労働を必要とする．第 1 季節を農閑期，第 2 季節を農繁期と呼ぶ．農村には土地所有者がいて，独占者として行動すると想定する．すなわち，農村の賃金率と利子率の決定を通じて，つまり労働と信用の市場を連結させることによって，農村での労働人口の確保をすると想定する．分析を簡単にするために，農村では農繁期にのみ，地主が労働を用いて農産物を生産するものとする．この仮定によって，農業における労働需要の季節変動を捉えることができる．地主は資本 (前年の農産物のストック) を初期保有し，それを都市生産者に貸し付ける．都市生産者は資本を用い，都市労働者を雇用して生産を行い，農閑期の生産物を供給する．都市では農閑期においてのみ生産がなされると仮定する[3]．農村の労働者は，都市で働こうとすれば能力通りの賃金が支払われるが，失業する可能性がある．他方，農村に農業労働者として留まれば失業の恐れはないが，能力に合わない賃金が与えられる可能性があると想定する．これは本稿において労働移動の発生する原理である．労働者は都市には失業があることを知っており，その率を知った上で，期待効用に従って，賃金の高い都市に行くかどうかを決めるとする．

2.1　労働者の効用最大化

第 1 期首の時点で職に就いていない農村在住の労働者を考える．労働者は生産効率に関してのみ異質であると仮定する．彼女の生産効率はある実数 a で表される．生産効率 a の労働者は単位時間に a だけの消費財を生産する．労働者の可能な生産効率の全体は一つの実数の区間 $[\underline{a}, \bar{a}] \subset \mathbb{R}_+$ で与えられるものとしよう．労働者はその区間上に分布し，その分布は一つの連続的な密度関数 $f(a)$, $f(a) \geqq 0,\ a \in [\underline{a}, \bar{a}]$ かつ $\int_{\underline{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a = 1$ で表現されるものとする．つまり生産効率が a であ

[3] この仮定を崩して，一年を通して都市で生産が行われるとすることは将来の課題である．

る労働者が経済全体で $f(a)$ だけの密度をもっているということである．どの労働者も第 1 期の消費財と第 2 期の消費財の消費量の組み合わせに対する選好は同じであり，効用関数 $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ で表現されるとする．そして，

仮定 1. 効用関数 u は

(U) $\mathbb{R}^2_+$ 上で連続で増加的かつ準凹，$\mathbb{R}^2_{++}$ 上で厳密に増加的で狭義準凹関数である[4]．

(B) $u(0,c_2)=u(c_1,0)=\inf\{u(c_1,c_2)\mid(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2_{++}\}\ \ \forall(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2_{++}$

を満たすとする．ここで，$c_t,\ t=1,2$ は労働者の t 期の財の消費量である．仮定 (**U**) は通常の仮定である．仮定 (**B**) はもし消費水準がゼロとなれば，労働者の効用は最も不満足な経済状態になることを意味する．

労働者は 2 期間を通して 1 単位の時間をあらかじめ持っているものとする．分析を簡単にするために，彼女は余暇を全く消費しないと仮定する．さらに，どの労働者も農村か都市のいずれかで雇用を探すことは可能であるが，両方ではできないものとしよう[5]．これは都市で働くためには都市へ移住する必要があると解釈できる．したがって，労働者は農閑期に都市に出て，農繁期には農村に戻って，労働を供給することはできない．それゆえ，彼女の選択肢は都市に移動するか，あるいは農村に留まるかである．農村での就業には，近年次第に薄れてきているとはいえ，世襲的要素が比較的強く働く．他方で，こうした伝手がない都市での就業は偶発性に左右されることがしばしばである．それゆえ，労働者は，農村に留まる場合，確実にある地主の土地で雇用されるとする．一方で，都市へ移動すれば，くじで職が割りふられるものとしよう．Harris and Todaro [19] に説明されるような通常の労働移動モデルでは，労働者は期待所得を最大にするように行動する．しかし，貯蓄手段をもたない貧困労働者にとって，一時的な消費の落ち込みは飢餓を意味するかもしれない．本稿では，ゆえに，労働者が最大にするのは期待効用であると仮定する．したがって，彼女は都市に移動する場合に得られるであろう期待効用と農村に留まる場合に得られる (期待) 効用を比較考量して，都市へ移動するかどうかを決定する．

農村に留まる場合，労働者は確実にある地主のもとで雇用されるが，賃金が支払われるのは第 2 期である．彼女は労働以外に資産を持たないため，借り入れによって第 1 期の消費を賄う必要がある．しかし，彼女は市場で利子率 r' (実質タームで測られる) で債券取引をする選択肢を選択肢としてもっていない．そして，第 2 期に彼女を雇用する地主から借り入れるよりほかはないものとしよう．こうした債券市場の不備は，Basu [5] が指摘するように，農村においては返済を履行させる法的な機構 (legal machinery) がないことによって説明されるかもしれない．法的履行手段の欠如のもとで，貸金業を営む主体は貸し倒れを防ぐために，他に取引関係がある主体にしか貸さない．地主であれば自分の土地で働く労働者にしか貸そうとしない．債務者が自分の土地で働く労働者であれば，法的手段はなくとも，賃金から差し引くというかたちで返済を確実に履行させることが可能であるというわけである．そこで，労働者は第 2 期に地主に賃金率 w で 1 単位の

[4] $\mathbb{R}^2_+$，$\mathbb{R}^2_{++}$ はそれぞれ 2 つの非負実数の集合のデカルト積，2 つの正実数の集合のデカルト積である．
[5] この仮定を緩めることは興味深い直近の課題である．

労働を供給することと引き換えに，第 1 期にその地主から利子率 i で第 1 期消費財を彼女が望むだけ借りることができる．賃金率，利子率ともに実質タームで測られ，生産効率には依存しないものとする．以上より，労働者 a が農村に留まる場合の行動は，次の最大化

$$\max_{(c_1^{\mathrm{r}}, c_2^{\mathrm{r}}) \in \mathbb{R}_+^2} u(c_1^{\mathrm{r}}, c_2^{\mathrm{r}}) \quad \text{subject to} \quad c_1^{\mathrm{r}} + \iota c_2^{\mathrm{r}} = \iota w \tag{1}$$

によって表現される．ただし，$\iota \stackrel{\text{def}}{=} 1/(1+i) \in \mathbb{R}_{++}$ である[6]．ι は (地主と労働者の間の) 第 1 期の消費財と第 2 期の消費財の交換比率である．添字 r は rural の頭文字である．予算制約は第 1 期首の時点で書かれている．労働者は第 1 期に c_1^{r} だけの額の消費財を地主から借り入れる．第 2 期には賃金所得 w から元利合計 $(1+i)c_1^{\mathrm{r}}$ を返済した残りを消費する．ワイエルシュトラスの定理より，上の最大化問題 (1) には必ず解が存在する．効用関数の狭義準凹性によって，解は一意である．さらに，仮定 (**B**) より，内点解である．パラメータへの依存関係を明示して，(1) の解を $c_t^{\mathrm{r}}(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota, w)), t = 1, 2$ とかく．ただし，$I^{\mathrm{r}}(\iota, w) \stackrel{\text{def}}{=} \iota w$ である．

他方，労働者が都市へ移動すれば，職はくじによって割り振られる．定職に就けば，自身の生産効率 $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$ に見合った賃金が支払われるものとする．市場で観察される定職に就ける確率，あるいは労働者が予想する市場での雇用率は $e \in (0, 1]$ で与えられる．$1 - e$ は市場で観察される定職に就けない確率である．都市へ移動するが定職に就けない労働者は，自営業などの生産活動に細々と従事するものとしよう．そして，生産効率によらず，単位時間あたり $\underline{a}$ だけの所得を得ると仮定する．以下では，都市へ移動するが定職に就けない労働者を失業者と呼ぶ．分析を簡単にするために，いずれにせよ，労働者は都市へ移動すれば，債券市場で取引をする選択肢をもっているものとする．これは，農村と異なり，都市では債務者に返済を履行させるための法的機構が存在すると解釈することができる．それゆえ，生産効率 $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$ をもつ労働者は，都市へ移動すれば，e の確率で，

$$\max_{(c_1^{\mathrm{uj}}, c_2^{\mathrm{uj}}) \in \mathbb{R}_+^2} u(c_1^{\mathrm{uj}}, c_2^{\mathrm{uj}}) \quad \text{subject to} \quad c_1^{\mathrm{uj}} + R c_2^{\mathrm{uj}} = a \tag{2}$$

に基づき行動する．他方，$1 - e$ の確率で，

$$\max_{(c_1^{\mathrm{un}}, c_2^{\mathrm{un}}) \in \mathbb{R}_+^2} u(c_1^{\mathrm{un}}, c_2^{\mathrm{un}}) \quad \text{subject to} \quad c_1^{\mathrm{un}} + R c_2^{\mathrm{un}} = \underline{a} \tag{3}$$

に基づいて行動する．ここで，$R \stackrel{\text{def}}{=} 1/(1+r') \in \mathbb{R}_{++}$ である．R は市場での第 1 期消費財と第 2 期消費財の交換比率である．添字 uj，un はそれぞれ urban job，urban non-job の頭文字である．予算制約はそれぞれ第 1 期首の時点で書かれている．都市に行って定職に就ける場合，彼女は第 1 期に自身の生産効率に等しい賃金所得 a から消費分 c_1^{uj} を差し引いた額，つまり Rc_2^{uj} だけの消費財を市場に貸し付ける (債券需要)．第 2 期には c_2^{uj} だけの元利合計を受け取ることができて，利子

[6] シンボル “$\stackrel{\text{def}}{=}$” は左辺が右辺によって定義されることを示している．

所得で生活する．都市で失業する労働者についても同様の解釈が可能である．先と同様，上の最大化問題 (2)，(3) の一意な内点解をそれぞれ $c_{\mathrm{t}}^{\mathrm{uj}}(R,a)$，$c_t^{\mathrm{un}}(R,\underline{a}), t=1,2$ とかく．

このとき，$V(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u(c_1^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w)),c_2^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w)))$，$V(R,a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u(c_1^{\mathrm{uj}}(R,a),c_2^{\mathrm{uj}}(R,a))$，$V(R,\underline{a}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u(c_1^{\mathrm{un}}(R,\underline{a}),c_2^{\mathrm{un}}(R,\underline{a}))$ として，ある労働者 a にとって，

$$eV(R,a)+(1-e)V(R,\underline{a}) \leqq V(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w)) \tag{4}$$

となるとき，この労働者は農村に留まる．逆の不等号が成立するときには，都市へ移動すると仮定する．すなわち，労働者は市場での失業確率を知った上で，期待効用に従って，賃金の高い都市に行くかどうかを決めるとする．もし労働者 a が農村に留まることを選択すれば，生産効率 $a' < a$ をもつ任意の労働者が農村に留まるであろうことは容易に分かるだろう．いま，$(\iota,w,R,e) \in \mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{+}\times\mathbb{R}_{++}\times(0,1]$ が与えられているとする．集合 $A(\iota,w,R,e)$ を $a\in[\underline{a},\bar{a}]$ の集合で，(4) を満たすものとする．$A(\iota,w,R,e)$ は農村に留まる労働者の生産効率の集合である．$A(\iota,w,R,e)\neq\emptyset$ であるとき，その上限を $\hat{a}$ とかく．ただし，$A(\iota,w,R,e)=\emptyset$ のときは，$\hat{a}=\underline{a}$ とする．$\hat{a}$ は，もし農村に留まる労働者がいれば，そのような労働者のなかで最高の生産効率を表す．以下，(ι,w,R,e) に対して $\hat{a}$ を割り当てる関数を $a:(\iota,w,R,e)\mapsto\hat{a}$ とかく．(ι,w,R,e) が与えられているとき，契約 (ι,w) がある閾値 $a(\iota,w,R,e)$ 以下の生産効率をもつ任意の労働者を引き付けるであろうことは明らかである．そして，地主は契約 (ι,w) の選択を通じて，その閾値を調整することができることに注意したい．

2.2 地主の利潤最大化

分析を簡単にするために，農村では失業はないものとする．地主は労働のみを用いて農産物を生産すると仮定する．農産物は消費あるいは投資に用いられると仮定する．

地主は，第 2.1 項で述べた理由によって，自分のところで働く労働者にしか貸さない．つまり，第 2 期の農業労働と債券の市場を連結させるとする．Basu [6] にならって，ここでは地主が労働者ごとに異なる価格づけを実施することを拒む社会的制約（social sanction）が存在すると仮定する．したがって，地主は労働者の生産効率によらず，どの労働者にも同じパッケージを提示しなければならない[7]．パッケージは利子率 i と賃金率 w の組で表される．どちらも実質タームで測られる．労働者が組 (ι,w) を受け入れる場合，債券の供給量によらず，第 2 期に賃金率 w で 1 単位の農業労働を地主に供給する必要がある．しかし，利子率 i でどれだけ実際に農業労働者が第 1 期消費財を借りる (債券供給) かは労働者の需要関数 $c_1^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$，$c_2^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$ にもとづいて，労働者が決めることができる．地主は労働者の需要関数を正確に推定することができるものとする．さらに，生産者としての地主は債券市場にアクセスをもち，市場利子率 r' で市場にいくらでも債

[7]こうした価格の非差別をモデル化する場合，主に 2 つの方法がある (Basu [6])；一つは，地主がすべての労働者にただ一つの契約を提示する場合である．もう一つは多くの契約を提示することができるがどの労働者にも同じ契約の組を提示しなければならない場合である．本稿では前者に焦点を当てる．後者の場合に以下のモデルの結果がどうなるかを考察することは将来の興味深い課題である．

券を供給することができるものと仮定する．

地主の行動は次の最大化

$$\max_{(\iota,w)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{+}} \pi(\iota,w) = \eta\left(\int_{\underline{a}}^{a(\iota,w,R,e)} af(a)da\right)^{\delta} - w\int_{\underline{a}}^{a(\iota,w,R,e)} f(a)da + \frac{1}{\iota}c_1^{\mathrm{r}}(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota,w))\int_{\underline{a}}^{a(\iota,w,R,e)} f(a)da - \frac{1}{R}c_1^{\mathrm{r}}(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota,w))\int_{\underline{a}}^{a(\iota,w,R,e)} f(a)da \tag{5}$$

によって表現される．ただし，$0<\delta<1$ である．また $\eta>0$ は農業技術パラメータである．地主の目的関数は第 2 期首の時点で書かれている．(5) は労働者の生産効率の異質性を考慮している点を除けば，インターリンケージモデルに特有の定式化である．Basu [6] にしたがえば，次のように解釈することができる．目的関数の第 1 項は地主が第 2 期に労働を投入して農産物を生産し，それを販売することから得る収入を，第 2 項は農業労働に対する賃金支払総額を表している．つまり，最初の 2 つの項は生産利潤である．第 3 項は地主が第 1 期に農業労働者に第 1 期消費財を $c_1^{\mathrm{r}}(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$ だけ貸し出す (債券需要) ことから第 2 期に得られる元利合計である．他方，地主が第 1 期に市場から第 1 期消費財を $c_1^{\mathrm{r}}(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$ だけ借り (債券供給) 第 2 期に返済しなければならない元利合計を表しているのが最後の項である．つまり，残りの 2 つの項は利子利潤である．したがって，(5) は地主が生産利潤と利子利潤を個別に勘案するのではなく，その和を最大にするように，賃金率と利子率の組を決定することを表している．さらに，(5) から，利子率 ι の変化は利子利潤への直接的な影響だけでなく，地主のところにやってくる労働者の生産効率を変えることによって，生産利潤にも間接的に影響を与えることを読み取ることができる．これは第 2.1 項で挙げた債券市場の不備を補うといった側面以外に，本分析において，地主に労働者と雇用契約だけでなく債券取引も連結させるインセンティブを与える要因であると考えることができる．(5) の解を $\iota(R,e), w(R,e)$ とかく[8]．また，(R,e) のときに達成できる最大利潤を $\pi(\iota(R,e), w(R,e))$ とかく．

2.3 地主の効用最大化

消費者としての地主は資本を $\bar{K}$ だけ初期保有するものとする．資本は前期末の農業生産物の蓄積である．地主はそれを都市の生産者にレンタルすることができて，今期にレンタル料 $r\bar{K}$ を生み出す．r はレンタル率である．ストックとしての $\bar{K}$ は第 1 期で使われてなくなってしまう (非耐久財) と想定する．ここで，資本の支払部分のレンタル率 r と消費貸借の利子率 r' が同一でないことに注意が必要である．同じ時点で選択の対象になる資産であれば，異なる利子率がつくことになれば，裁定が働いて同じになるはずである．しかし，ここでは資本の方は前期末に蓄積されており，今期は生産に参加して今期の財をつくり，今期末に $r\bar{K}$ だけの利子所得 (レンタル所得) を発生させる．一方，消費貸借は今期借りて来期返すというようになっており，2 つの資産の時点が

[8](5) の解の存在および一意性については第 3.1 項で議論する

異なる．さらに，今期は都市でのみ生産が行われ，来期は農村でのみ行われるという意味で，今期と来期は同じ期の繰り返しではないので，$r = (r')^2$ とはならないことにも注意したい．

地主は消費者としても債券市場で利子率 r' で取引をする選択肢をもっていると仮定する．分析を簡単にするために，2 財の消費量の組み合わせに対し地主は労働者と同じ効用関数 $u\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ をもっていると仮定する[9]．次の最大化問題

$$\max_{(c_1^{\mathrm{L}}, c_2^{\mathrm{L}}) \in \mathbb{R}^2_+} u(c_1^{\mathrm{L}}, c_2^{\mathrm{L}}) \quad \text{subject to} \quad c_1^{\mathrm{L}} + Rc_2^{\mathrm{L}} = I^{\mathrm{L}} \tag{6}$$

が彼女の行動を記述するものとする．$c_t^{\mathrm{L}},\ t = 1, 2$ は地主の t 期の財の消費量である．添字 L は Landlord の頭文字である．(6) において予算制約は第 1 期首の時点で書かれている．彼女は第 1 期に市場から c_1^{L} だけの額の消費財を借り入れ (債券供給)，第 2 期には $(1+r')c_1^{\mathrm{L}}$ だけの元利合計を返済する．ここで，I^{L} は第 1 期首の時点で書かれた彼女の所得であり，$I^{\mathrm{L}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} r\bar{K} + R\pi(\iota(R, e), w(R, e)) - R\bar{K} > 0$ である．解釈を与えるために，これを第 2 期首の時点に書き直してみれば，

$$(1 + r')I^{\mathrm{L}} = \pi(\iota(R, e), w(R, e)) + (1 + r')r\bar{K} - \bar{K}$$

である．第 1 項は利潤からの配当である．第 2 項において，$r\bar{K}$ は地主が初期に保有する資本 $\bar{K}$ を都市生産者に提供することによって第 1 期首に得るレンタル所得である．それは貸し付けることができるので，第 2 期首には $(1 + r')\bar{K}$ だけの所得になるとみることができる．第 3 項は次期の資本として蓄積するために，第 2 期消費財を $\bar{K}$ だけ市場から買い戻すことを表している[10]．先と同様に，(6) の一意な内点解を $c_t^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(R, e))$，$t = 1, 2$ とかく．

2.4 都市生産者の利潤最大化

都市では，多数の同質の生産者が，労働 L と資本 K を用いて，第 1 期消費財を生産する．それは消費のためにのみ使われると仮定する．都市の生産技術を

$$F(L, K) = \min\left\{\frac{L}{\alpha}, \frac{K}{\beta}\right\},\ 0 < \alpha, \beta < 1 \tag{7}$$

と表現する．ここで，あたかも都市には一人の生産者しか存在しないかのように表現している．それは生産関数 (7) が 1 次同次なので，多人数の生産者をあたかも一人の生産者であるかのように扱うことができるためである．生産関数 (7) のもとでは資本と労働の最適投入比率しか求まらない．そこで，K を地主が供給する資本の量 $\bar{K}$ に固定すると，最適な労働投入量 (労働需要) は，

$$L^{\mathrm{d}} = (\alpha/\beta)\bar{K}$$

[9] 地主と労働者の効用関数が異なるとしても，以下の結果に影響を与えない．

[10] この仮定は本質的でない．つまり，第 2 期消費財を市場から買い戻さないとしても以下の結果に影響を与えない．

となる．ただし，L^{d} は効率単位で測られている．生産関数 (7) のもとで，生産が行われるとすれば利潤がゼロとなるケースに限られると仮定する．完全分配を想定して，

$$\frac{\bar{K}}{\beta} = L^{\mathrm{d}} + r\bar{K}$$

である．左辺は生産物価値である．a の労働者の限界生産力が a であり，第 1 期消費財価格が 1 であるから，右辺の第一項は競争的な賃金支払を表している．第二項はレンタル支払である．したがって，

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + r \Rightarrow \ r = \frac{1-\alpha}{\beta}$$

を得る．つまり，資本のレンタル率は資本係数マイナス資本労働比率の逆数に等しくなる．ここで，必ずしも $r \geqq 1$ とは限らないことに注意が必要である．農村の地主が所有する資本は都市の生産者に貸し付ける以外の用途がないものであり，$r < 1$ が成立する場合には元本が地主に保証されないことを意味する．

2.5 市場均衡条件

以上によって，あらかじめ予想される雇用確率が e のもとでの，諸財の市場均衡条件をかくことができる．以下では，次節も含めて，() の中の $\cdot$ は (R, e) を表すものとする．第 1 期消費財の需給の一致は

$$\begin{aligned} &c_1^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(\cdot)) + c_1^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), I^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), w(\cdot))) \int_{\underline{a}}^{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)} f(a)\mathrm{d}a + e\int_{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}^{\bar{a}} c_1^{\mathrm{u}j}(R,a)f(a)\mathrm{d}a \\ &+ (1-e)c_1^{\mathrm{u}n}(R, \underline{a}) \int_{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a = \min\left\{\frac{L^{\mathrm{d}}}{\alpha}, \frac{\bar{K}}{\beta}\right\} + (1-e)\underline{a}\int_{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a \qquad (8) \end{aligned}$$

のようにかける．左辺が第 1 期消費財の総需要で，右辺が第 1 期消費財の総供給である．第 2.1 項で，労働者は都市で定職に就けない場合労働のみを用いて単位時間当たり $\underline{a}$ だけの第 1 期消費財を自家生産すると仮定した．したがって，定職に就けない労働者が生み出す総アウトプットを表しているのが右辺第 2 項である．

第 2 期消費財の需給の一致は

$$\begin{aligned} &c_2^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(\cdot)) + c_2^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), I^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), w(\cdot))) \int_{\underline{a}}^{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)} f(a)\mathrm{d}a + e\int_{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}^{\bar{a}} c_2^{\mathrm{u}j}(R,a)f(a)\mathrm{d}a \\ &+ (1-e)c_2^{\mathrm{u}n}(R, \underline{a}) \int_{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a + \bar{K} = \eta\left(\int_{\underline{a}}^{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)} af(a)\mathrm{d}a\right)^{\delta} \qquad (9) \end{aligned}$$

のようにかける．左辺が第 2 期消費財の総需要で，右辺が第 2 期消費財の総供給である．

債券の需給の一致は

$$\begin{aligned}&\mathrm{r}\bar{K} + e\int_{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}^{\bar{a}}(a - c_1^{\mathrm{u}j}(R,a))f(a)\mathrm{d}a + (1-e)(\underline{a} - c_1^{\mathrm{u}n}(R,\underline{a}))\int_{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}^{\bar{a}}f(a)\mathrm{d}a\\&= c_1^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(\cdot)) + c_1^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), I^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), w(\cdot)))\int_{\underline{a}}^{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}f(a)\mathrm{d}a \qquad (10)\end{aligned}$$

のようにかける．左辺が債券の総需要で財を貸したい量である．右辺が債券の総供給で財を借りたい量である．

都市の労働市場の均衡を，あらかじめ知られている失業率と結果として現れる失業率が一致することによって，表現する．したがって，労働市場の均衡は総労働需要と総労働供給の期待値 (雇用確率が e のもとでの総供給) が一致することによって記述される．それゆえ，資本市場の均衡を前提とすれば，都市労働の需給の一致は

$$(\alpha/\beta)\bar{K} = e\int_{a(\iota(\cdot),w(\cdot),\cdot)}^{\bar{a}} af(a)\mathrm{d}a \qquad (11)$$

とかける．左辺が都市労働の総需要で，右辺が都市労働の総供給である．それぞれ効率単位で測っている．(11) は不均衡の一つである失業を均衡状態として表現している．後で示すように，(11) によって，失業のある経済におけるワルラス法則の成立が保証され，したがって均衡の存在が確立される．

以上より，市場均衡を定義することができる．

定義 1. [主体均衡条件] (1)〜(7) と [市場均衡条件] (8)〜(11) を満たす価格と失業率，配分の組を市場均衡と呼ぶ.

この定義の特徴は，入谷・角野 [29] と同様，失業率が内生的に決定される点にある．つまり，あらかじめ信じられている失業率が実際の失業率と一致するように，市場で失業率が決まる．市場は予想と整合的な失業率を作るそのような調整能力をもっているが，雇用自体を完全雇用に調整はしないことに注意したい．また，市場は賃金によって都市労働の需給を調整する能力を備えていないことにも注意が必要である．都市で雇用される労働者には限界生産物価値に等しい賃金が支払われ，失業が生じているにもかかわらず賃金は下がらない.

3 失業均衡の存在

3.1 地主の最適契約

$(R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0, 1]$ が与えられているとする．いま，$\underline{w}, \bar{w}$ をそれぞれ $V(R, \underline{a}) = V(R, Rw)$, $eV(R, \bar{a}) + (1-e)V(R, \underline{a}) = V(R, Rw)$ を満たすような w とする[11]．$\underline{w}$ は $\iota = R$ のもとで，すべ

[11] このような w の存在は中間値定理により保証される.

ての労働者が都市へ移動する最高の賃金率である．他方，$\bar{w}$ は $\iota = R$ のもとで，すべての労働者を農村に留まらせるのに必要な最低の賃金率である．このとき，以下が成立する．

補助定理 1. 関数 $\pi(\iota, w)$, $(\iota, w) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{+}$ は (ι^*, w^*), $\iota^* = R$, $w^* \in [\underline{w}, \bar{w}]$ で最大値をとる．

補助定理 1 は利潤最大化問題 (5) の解の存在を保証する．そのうえで，市場利子率 (地主が労働者に貸すことの機会費用) に等しい利子率を労働者に課すことが地主にとって望ましいと主張する．

以下の仮定をおく．

仮定 2. $\iota = R$ のもとで，生産関数 $g(w) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \left(\int_{\underline{a}}^{a(R,w,R,e)} af(a)\mathrm{d}a \right)^{\delta}$ は $[\underline{w}, \bar{w}]$ で狭義凹関数である．

仮定 2 は，$\iota = R$ であるような解 $(\iota(R,e), w(R,e))$ の一意性を保証するための技術的な条件である．これはいくらか強い仮定であるかもしれない．しかしながら，生産関数がこの条件を満たす例をいくつかみつけることができる．例えば，労働者と地主がコブ・ダグラス型効用関数を持ち，労働者の生産効率が一様分布にしたがっている場合を考えよう[12]．$\underline{a} = 0$ とすれば，$g(w) = \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\delta} \left(\frac{R}{e}\right)^{2\delta} w^{2\delta}$ である．$\delta \in (0, 1/2)$ のとき，生産関数 g が狭義凹になることは容易に確かめられるだろう．

3.2 ワルラス法則の成立と失業均衡の存在

いま考えている経済には，第 1 期消費財，第 2 期消費財，都市労働，債券および資本の 5 つの財貨が存在する．しかしながら，すぐ後で示すように，(i) 債券市場の均衡は他のある財 (第 2 期消費財) の市場の均衡と同じである．(ii) 資本市場の均衡は自動的に成立する．そして残りの 3 つの財に対して，(iii) 他のすべての市場が均衡すれば均衡するというワルラス法則的なものが成立する．したがって，2 つの市場で需給がバランスすれば，あらゆる市場で需給がバランスする．それゆえ，2 つの市場を考察すればよい．

---

[12]第 4 節も参照されたい．

まず債券市場についてみてみよう．債券の供給は π の定義，労働者と地主の予算制約を用いると，

$$
\begin{aligned}
&c_1^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(\cdot)) + c_1^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), I^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), w(\cdot))) \int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a \\
&= R\left(\pi(\iota(\cdot), w(\cdot)) + \frac{1}{R} r\bar{K} - \bar{K} - c_2^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(\cdot)) + \frac{1}{R} c_1^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), I^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), w(\cdot))) \int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a\right) \\
&= R\Bigg(\eta\left(\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} af(a)\mathrm{d}a\right)^{\delta} - w(\cdot)\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a + \left(\frac{1}{\iota(\cdot)} - \frac{1}{R}\right) c_1^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), I^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), w(\cdot))) \int_{\underline{a}}^{\tilde{a}} f(a)\mathrm{d}a \\
&\quad + \frac{1}{R} r\bar{K} - \bar{K} - c_2^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(\cdot)) + \frac{1}{R} c_1^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), I^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), w(\cdot))) \int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a\Bigg) \\
&= R\left(\eta\left(\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} af(a)\mathrm{d}a\right)^{\delta} - c_2^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), I^{\mathrm{r}}(\iota(\cdot), w(\cdot))) \int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a - \bar{K} - c_2^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(\cdot))\right) + r\bar{K} \\
&= R \times \text{地主の第 2 期消費財の都市への供給} + r\bar{K}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，() の中の $\cdot$ は (R, e) を表す．また，$\hat{a} = a(\iota(\cdot), w(\cdot), \cdot)$ である．このように，債券の供給は第 2 期消費財の需要とは必ずしも一致しない．他方，債券の需要は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&r\bar{K} + e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} (a - c_1^{\mathrm{u}j}(R, a)) f(a)\mathrm{d}a + (1-e)(\underline{a} - c_1^{\mathrm{u}n}(R, \underline{a})) \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a \\
&= r\bar{K} + R\left(e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} c_2^{\mathrm{u}j}(R, a) f(a)\mathrm{d}a + (1-e) c_2^{\mathrm{u}n}(R, \underline{a}) \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a\right) \\
&= r\bar{K} + R \times \text{都市の第 2 期消費財の需要}
\end{aligned}
$$

以上により，債券の需給バランスは第 2 期消費財の需給バランスと同値である．したがって，債券の需給バランスは考察の外に置くことができる．

次に，資本市場についてみる．都市には 1 次同次の生産技術がある．それゆえ，都市の生産のサイズは資本の供給によって決まる．したがって，資本市場の均衡は自動的に成立する．資本の需給バランスも考察の外に置くことができる．

任意の $(R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0, 1]$ について，第 1 期消費財，第 2 期消費財および都市労働の総需要と

総供給の差を超過需要と呼び，それぞれ $z_1(R,e)$，$z_2(R,e)$ および $z_L(R,e)$ とかく．

$$
\begin{aligned}
z_1(R,e) &= c_1^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(R,e)) + c_1^{\mathrm{r}}(\iota(R,e), I^{\mathrm{r}}(\iota(R,e), w(R,e))) \int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a + e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} c_1^{\mathrm{u}j}(R,a) f(a)\mathrm{d}a \\
&\qquad + (1-e)c_1^{\mathrm{u}n}(R,\underline{a}) \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a - \left(\frac{\bar{K}}{\beta} + (1-e)\underline{a}\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a\right) \\
z_2(R,e) &= c_2^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(R,e)) + c_2^{\mathrm{r}}(\iota(R,e), I^{\mathrm{r}}(\iota(R,e), w(R,e))) \int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a + e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} c_2^{\mathrm{u}j}(R,a) f(a)\mathrm{d}a \\
&\qquad + (1-e)c_2^{\mathrm{u}n}(R,\underline{a}) \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a + \bar{K} - \eta\left(\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} a f(a)\mathrm{d}a\right)^{\delta} \\
z_L(R,e) &= \frac{\alpha}{\beta}\bar{K} - e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} a f(a)\mathrm{d}a
\end{aligned}
$$

である．表記を簡単にするため，$c_t^{\mathrm{L}} = c_t^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}(R,e))$，$c_t^{\mathrm{r}} = c_t^{\mathrm{r}}(\iota(R,e), I^{\mathrm{r}}(\iota(R,e), w(R,e)))$，$c_t^{\mathrm{u}j} = c_1^{\mathrm{u}j}(R,a)$，$c_t^{\mathrm{un}} = c_1^{\mathrm{u}n}(R,\underline{a})$，$t=1,2$，$\pi = \pi(\iota(R,e), w(R,e))$ とかく．労働者と地主が予算制約を等号で満たし，都市生産者と地主の得る利潤が消費者に完全に分配されるので，任意の $(R,e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1]$ について，

$$
\begin{aligned}
& z_1(R,e) + R\times z_2(R,e) + z_L(R,e) \\
&= \left[c_1^{\mathrm{L}} + c_1^{\mathrm{r}}\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a + e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} c_1^{\mathrm{u}j} f(a)\mathrm{d}a + (1-e)c_1^{\mathrm{un}}\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a - \left(\frac{\bar{K}}{\beta} + (1-e)\underline{a}\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a\right)\right] \\
&\quad + R\left[c_2^{\mathrm{L}} + c_2^{\mathrm{r}}\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a + e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} c_2^{\mathrm{u}j} f(a)\mathrm{d}a + (1-e)c_2^{\mathrm{un}}\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a + \bar{K} - \eta\left(\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} a f(a)\mathrm{d}a\right)^{\delta}\right] \\
&\quad + \left[\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} - e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} a f(a)\mathrm{d}a\right] \\
&= \left[c_1^{\mathrm{L}} + Rc_2^{\mathrm{L}} - (r\bar{K} + R\pi - R\bar{K})\right] + \left[c_1^{\mathrm{r}}\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a + \iota c_2^{\mathrm{r}}\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a - \iota w\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a\right] \\
&\quad + e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}}\left(c_1^{\mathrm{u}j} + Rc_2^{\mathrm{u}j} - a\right) f(a)\mathrm{d}a + (1-e)\left(c_1^{\mathrm{un}} + Rc_2^{\mathrm{un}} - \underline{a}\right)\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} f(a)\mathrm{d}a + \left[\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} + r\bar{K} - \frac{\bar{K}}{\beta}\right] \\
&\quad + R\pi + c_1^{\mathrm{r}}\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a + Rc_2^{\mathrm{r}}\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a - R\eta\left(\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} a f(a)\mathrm{d}a\right)^{\delta} \\
&= R\pi - R\left(\eta\left(\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} a f(a)\mathrm{d}a\right)^{\delta} - \frac{1}{R}\cdot c_1^{\mathrm{r}}\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a - c_2^{\mathrm{r}}\int_{\underline{a}}^{\hat{a}} f(a)\mathrm{d}a\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これはワルラス法則に他ならない．したがって，第 1 期消費財，第 2 期消費財および都市労働の 3 つの連立超過需要方程式のうち一本は独立でない．

以上により，独立な方程式は 2 つであることが分かる．また，未知数は第 2 期消費財価格 R と雇用率 e の 2 つである．

諸関数の連続性と境界条件についてみておこう．仮定 1 のもとで，労働者と地主の需要関数の連続性は，通常の方法によって，証明することができる (例えば Mas-Collel, Whinston and Green [22] を参照されたい)．また，仮定 2 のもとで，地主の利潤最大化問題の解 (補助定理 1) の連続性も容易に示される．次の補助定理の成立をみておく[13].

補助定理 2. 仮定 1 のもとで，$a(\iota, w, R, e)$, $(\iota, w, R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}_{++} \times (0, 1]$ は連続である．

補助定理 3. 地主の効用関数が仮定 1 を満たすとする．そのとき，正の実数列 R^n, $n = 1, 2, \ldots$ について，$\lim_{n\to\infty} R^n = 0$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} c_2^{\mathrm{L}}(R^n) = \infty$ が成立する．

これで市場均衡の存在を確立する準備ができた[14].

定理 1. 仮定 1 および仮定 2 が満たされるとする．このとき，$z_l(R, e) = 0$, $l = 1, 2, L$ を満たすような雇用率と第 2 期消費財価格 $(R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0, 1]$ が存在する．

定理 1 は，現在考察している経済における市場均衡の存在を保証する．Benassy[10] と異なり，我々は実際に失業のある均衡が実現するようなパラメータを見つけることができる．例えば，労働者と地主がコブ・ダグラス型効用関数をもち，労働者の生産効率が一様分布にしたがっているとする．パラメータが $\delta = 1/3$, $\bar{K} = \eta = \epsilon = 1$, $\alpha = \beta = \gamma = 1/2$ で与えられるとき，均衡雇用率は $e^* = 8/27 \in (0, 1)$ であり，第 2 期消費財価格は $R^* = 4$ となる．

4 比較静学

本節では，外生的なパラメータの変化があるときの都市での均衡失業率，第 2 期財の均衡価格 (均衡市場利子率)，農村から都市への労働移動，そして農村でのインターリンケージ取引への影響を調べたい．そのために，本節では労働者と地主が最も単純なコブ・ダグラス型効用関数をもつと仮定する．γ を正の定数とすれば，労働者と地主の効用関数は

$$u(c_1, c_2) = (c_1)^{\gamma} \times (c_2)^{(1-\gamma)}$$

と表される．このとき，労働者と地主の第 t 期消費財の需要関数，$t = 1, 2$ はそれぞれ

$$\begin{cases} c_1^{\mathrm{r}}(\iota, \iota w) = \iota\gamma w, & c_2^{\mathrm{r}}(\iota, \iota w) = (1-\gamma)w \\ c_1^{\mathrm{uj}}(R, a) = \gamma a, & c_2^{\mathrm{uj}}(R, a) = \frac{1}{R}(1-\gamma)a \\ c_1^{\mathrm{un}}(R, \underline{a}) = \gamma \underline{a}, & c_2^{\mathrm{un}}(R, \underline{a}) = \frac{1}{R}(1-\gamma)\underline{a} \\ c_1^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}) = \gamma I^{\mathrm{L}}, & c_2^{\mathrm{L}}(R, I^{\mathrm{L}}) = \frac{1}{R}(1-\gamma)I^{\mathrm{L}} \end{cases} \tag{12}$$

[13] 補助定理 2 の証明は数学付録 A.2 に譲る．

[14] 定理 1 の証明は数学付録 A.3 に譲る．

である．さらに，労働者の生産効率は一様分布にしたがうと仮定する．それゆえ，生産効率の分布は確率密度関数 $f(a)=\epsilon,\ a\in[\underline{a},\bar{a}]$ で表現される．以下，分析を簡単にするために，$\underline{a}=0$ とする．$\epsilon=1/\bar{a}$ である．$eV(R,\hat{a})=V(\iota,\iota w)$ つまり，

$$e(\gamma\hat{a})^{\gamma}\left(\frac{1}{R}(1-\gamma)\hat{a}\right)^{1-\gamma}=(\iota\gamma w)^{\gamma}((1-\gamma)w)^{1-\gamma}$$

を $\hat{a}$ について解いて，

$$a(\iota,w,R,e)=\frac{\iota^{\gamma}R^{1-\gamma}w}{e} \tag{13}$$

である．(12) と (13) を地主の利潤最大化問題 (5) に代入すれば，

$$\max_{(\iota,w)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{+}}\pi(\iota,w)=\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\delta}\left(\frac{\iota^{\gamma}R^{1-\gamma}}{e}\right)^{2\delta}w^{2\delta}-\left(1-\gamma+\frac{\iota}{R}\gamma\right)\epsilon\frac{\iota^{\gamma}R^{1-\gamma}}{e}w^{2}$$

を得る．補助定理 1 より $\iota^{*}=R$ が成立する．これを利潤最大化の一階の必要条件に代入すれば，

$$w^{*}=\epsilon^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2^{\delta}}{\delta\eta}\left(\frac{R}{e}\right)^{1-2\delta}\right)^{-\frac{1}{2(1-\delta)}} \tag{14}$$

を得る．(12) および補助定理 1 から，第 1 期消費財の市場均衡条件 (8) と都市労働の市場均衡条件 (11) はそれぞれ，

$$\gamma\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\bar{K}+R\eta\left(\int_{0}^{\hat{a}}af(a)\mathrm{d}a\right)^{\delta}-R\bar{K}+e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}}af(a)\mathrm{d}a\right)=\frac{\bar{K}}{\beta} \tag{8$'$}$$

$$e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}}af(a)\mathrm{d}a=\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} \tag{11$'$}$$

と書き直すことができる．ただし，$\hat{a}=a(\iota(R,e),w(R,e),R,e)$ である．(13) と (14) を用いて (8′) と (11′) を書き換えると，

$$e=\frac{\delta}{2}\eta^{\frac{1}{\delta}}R^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{1-\gamma}{\beta\gamma}+R\right)\bar{K}\right)^{-\frac{1-\delta}{\delta}} \tag{15}$$

かつ

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K}=\frac{\delta}{2}\eta^{\frac{1}{\delta}}R^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{1-\gamma}{\beta\gamma}+R\right)\bar{K}\right)^{-\frac{1-\delta}{\delta}}\frac{1}{2\epsilon}-\frac{\delta}{2}\left(\frac{1-\gamma}{\beta\gamma}+R\right)\bar{K} \tag{16}$$

である．連立方程式 (15) と (16) に解 (R^*, e^*) が存在して，しかもヤコビアンがゼロでなかったとる．陰関数定理によって，比較静学分析を行うと，以下の結果を得る[15].

[比較静学１]　地主があらかじめ保有する資本の量が増えれば，第 2 期財価格は上昇し (したがって市場利子率は下落し)，都市での失業率は下落する $(\partial R/\partial \bar{K} > 0,\ \partial e/\partial \bar{K} > 0)$.

[比較静学２]　都市における労働使用的な技術変化 (α の低下) は，第 2 期財価格の下落 (市場利子率の上昇) と都市失業率の上昇を招く $(\partial R/\partial \alpha > 0,\ \partial e/\partial \alpha > 0)$.

[比較静学３]　都市における労働節約的な技術変化 (β の低下) は，第 2 期財価格の上昇 (市場利子率の下落) と都市失業率の下落につながる $(\partial R/\partial \beta < 0,\ \partial e/\partial \beta < 0)$.

Harris and Todaro [19] に説明されるような通常の労働移動モデルでは，労働者は同質である．その意味で，本稿が提供する興味深い外生的パラメータの変化は，労働者間の生産効率の差の変化であろう．

[比較静学４]　労働者間の生産効率の差が小さくなる (ϵ の上昇) と，第 2 期財価格は上昇し (市場利子率は下落し)，都市失業率は下落する $(\partial R/\partial \epsilon > 0,\ \partial e/\partial \epsilon > 0)$.

[比較静学５]　労働者や地主がより近視眼的になる (γ の上昇) と，第 2 期財価格は下落し (市場利子率は上昇し)，都市失業率は上昇する $(\partial R/\partial \gamma < 0,\ \partial e/\partial \gamma < 0)$.

[比較静学６]　農村における産出増加的な技術改良 (η の上昇) は，第 2 期財価格の下落 (市場利子率の上昇) と都市失業率の上昇をもたらす $(\partial R/\partial \eta < 0,\ \partial e/\partial \eta < 0)$.

η の値の上昇は，農村における生産関数の上方シフトを意味し，具体的には化学肥料の使用，灌漑の普及，種の改良といった農業技術の改善と解釈することができる．この結果は，農村における技術改良は都市失業率を下落させるという HT モデルの予想と対称的である．

参考文献

[1] Bardhan, P. (1984), *Land, Labour, and Rural Poverty: Essays in Development Economics*, Oxford University Press, Ch.6.

[2] Bardhan, P. and A. Rudra (1978), "Interlinkage of land, labour and credit relations: An analysis of village survey data in East India,"*Economic Political Weekly*, 13, 367-384.

[3] Bardhan, P. and A. Rudra (1981), "Terms and conditions of labour contracts in agriculture: Results of a survey in West Bengal 1979,"*Economic Political Weekly*, 43, 89-111.

[4] Bardhan, P. and C. Udry (1999), *Development Microeconomics*, Oxford University Press, Ch.5, 9.

[15] 詳細は数学付録 A.4 を参照されたい．

[5] Basu, K. (1983), "The Emergence of Isolation and Interlinkage in Rural Markets," *Oxford Economic Papers*, 35, 262-280.

[6] Basu, K. (1987), "Disneyland monopoly, Interlinkage and Usurious Interest Rates," *Journal of Public Economics*, 34, 1-17.

[7] Basu, K. (1995), "Rural Credit and Interlinkage: Implications for Rural Poverty, Agrarian Efficiency, and Public Policy," in M. G. Quibria (ed), *Critical Issues in Asian Development: Theories, Experiences and Policies*, Oxford University Press, Chap 5.

[8] Bell, C. (1988), "Credit Markets and Interlinked Transactions," in Chenery, H. and T. N. Srinivasan (eds.), *Handbook of Development Economics*, vol. 1, Amsterdam: North-Holland, 763-830.

[9] Bell, C. and T. N. Srinivasan (1989), "Interlinked Transatctions in Rural Markets: An Empirical Study of Andhra Pradesh, Bihar and Punjab," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 51, 73-83.

[10] Benassy, J. P. (1975), "Neo-Keynesian Disequilibrium Theory in a Monetary Economy," *Review of Economic Studies*, 42, 503-523.

[11] Bhattacharya, P. C. (1993), "Rural-Urban Migration in Economic Development," *Journal of Economic Survey*, 7, 243-281.

[12] Braverman, A. and J. L. Gausch (1984), "Capital Requirements, Screening and Interlinked Sharecropping and Credit Contracts," *Journal of Development Economics*, 14, 359-374.

[13] Braverman, A. and J. Stiglitz (1982), "Sharecropping and the Interlinking of agrarian markets," *American Economic Review*, 72, 695-715.

[14] Calvo, G. A (1978), "Urban unemployment and wage determination in LDCs: Trade unions in the Harris-Todaro model," *International Economic Review*, 19, 65-81.

[15] Corden , W. M. and R. Findlay (1975), "Urban unemployment, intersectoral capital mobility and development policy," *Economica*, 62, 59-78.

[16] Gill A. (1996), "Interlinked Agrarian Credit Markets in Punjab: Exploitative, Yet Growing," *Economic Political Weekly* 31, 586-588.

[17] Gill A. (2004), "Interlinked agrarian credit markets: case study of Punjab," *Economic Political Weekly*, 3741-3751.

[18] Harris, John R. and M. P. Todaro (1969), "Wages, Industrial Employment, and Labour Productivity: The Kenyan Experience," *East African Economic Review*, 1.

[19] Harris, John R. and M. P. Todaro (1970), "Migration, Unemployment and Development: A Two-Sector Analysis," *American Economic Review*, 60, 126-142.

[20] Khan, A. M. (1980), "The Harris-Todaro Hypothesis and the Heckscher-Ohlin-Samuelson Trade Model: A Synthesis," *Journal of International Economics*, 10, 527-547.

[21] Khan, A. M. (1989), "The Harris-Todaro Model," in Eatwell, J. et al. (eds.), *The New Palgrave*, Macmillan, London, 148-153.

[22] Mas-Collel, A., Whinston, M. D. and Green, J. R. (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

[23] Mitra, P. (1983), "A Theory of Interlinked Rural Transactions," *Journal of Public Economics*, 20, 167-191.

[24] Nikaido, H. (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press: New York.

[25] Rockafellar, R. T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton: Princeton University Press.

[26] Stiglitz, J. E. (1974), "Alternative theories of wage determination and unemployment in LDCs: The labour-turnover model," *Journal of Political Economy*, 86, 194-227.

[27] Williamson, J.G. (1988),"Migration and Urbanization," in H. B. Chenery and T. N. Srinivasan (eds.), *Handbook of Development Economics*, vol.i, Amsterdam: North-Holland, 425-465.

[28] Wharton, C. R. (1962), "Marketing, merchandising, and moneylending: A note on middleman monopsony in Malaya," *Malayan Economic Review*, 7.

[29] 入谷純•角野浩 (2001),「On the Existence of Unemployment Equilibria under Wage Rigidity」『商学討究』第 51 巻第 4 号, 271-294.

数学付録

A.1 補助定理 1 の証明

補助定理の証明の前に，地主の利潤を書き換えておく．

$$C(\iota, w) \overset{\text{def}}{=} w + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\iota}\right) c_1^{\mathrm{r}}(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota, w))$$

とすれば，地主の利潤は

$$\pi(\iota,w)=\eta\left(\int_{\underline{a}}^{\hat{a}(\iota,w,R,e)}af(a)da\right)^{\delta}-C(\iota,w)\int_{\underline{a}}^{\hat{a}(\iota,w,R,e)}f(a)da$$

と書き換えられる．ここで，$C(\iota,w)$ は賃金と信用供与をまとめた労働者一人当たり雇用費用 (per worker cost) を表す．農村に留まる労働者の予算制約 (1) を考慮すれば，

$$C(\iota,w)=\frac{1}{R}c_1^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))+c_2^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$$

が成立する．以上の準備のうえで，2 段階に分けて，補助定理の証明を行う．

$(R,e)\in R_{++}\times(0,1]$ が与えられているとする．

Step 1： $\forall(\iota,w)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{+}\ ((\iota\neq R)\Rightarrow(\exists!w'\in\mathbb{R}_{+},\pi(R,w')\geqq\pi(\iota,w)))$.

(ι,w), $\iota\neq R$ を $\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{+}$ の任意の要素とする．ここで，利子率と賃金率の新たな組を

$$\tilde{\iota}=R,\ \tilde{w}=\frac{1}{R}c_1^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))+c_2^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$$

と定義する．$\tilde{w}$ の定義によって，$c_t^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$, $t=1,2$ は $\tilde{\iota},\tilde{w}$ のもとでの予算線上にあるので，

$$\begin{aligned}V(\tilde{\iota},I^{\mathrm{r}}(\tilde{\iota},\tilde{w}))&=u(c_1^{\mathrm{r}}(\tilde{\iota},I^{\mathrm{r}}(\tilde{\iota},\tilde{w})),c_2^{\mathrm{r}}(\tilde{\iota},I^{\mathrm{r}}(\tilde{\iota},\tilde{w})))\\&\geqq u(c_1^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w)),c_2^{\mathrm{r}}(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w)))=V(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))\end{aligned}$$

が成立する．それゆえ，ある $w'\in[0,\tilde{w}]$ が一意に存在して，

$$V(\tilde{\iota},I^{\mathrm{r}}(\tilde{\iota},w'))=V(\iota,I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$$

を満たす．このとき，

$$a(\tilde{\iota},w',R,e)=a(\iota,w,R,e)\ \ \text{かつ}\ \ C(\tilde{\iota},w')-C(\iota,w)=w'-\tilde{w}\leqq 0$$

が成立する．したがって，

$$\pi(R,w')=\pi(\tilde{\iota},w')\geqq\pi(\iota,w)$$

を得る．

Step 2：$\exists\hat{w}\in[\underline{w},\bar{w}]\subset\mathbb{R}_{+},\ \hat{w}\in\arg\max\{\pi(R,w)\mid w\in\mathbb{R}_{+}\}$.

$\mathbb{R}_{+}$ 上の関数 $\hat{\pi}$ を $\hat{\pi}(w)=\pi(R,w)$ と定義する．任意の $w>\bar{w}$ について，$\hat{a}(R,w,R,e)=\bar{a}$ が成立するので，

$$\hat{\pi}(w)=\eta\left(\int_{\underline{a}}^{\bar{a}}af(a)da\right)^{\delta}-w\int_{\underline{a}}^{\bar{a}}f(a)da<\eta\left(\int_{\underline{a}}^{\bar{a}}af(a)da\right)^{\delta}-\bar{w}\int_{\underline{a}}^{\bar{a}}f(a)da=\hat{\pi}(\bar{w})$$

である．他方，$[0,\bar{w}]$ はコンパクト集合であり，$\hat{\pi}$ は $[0,\bar{w}] \subset \mathbb{R}_+$ 上の連続な実数値関数である．それゆえ，ワイエルシュトラスの定理によって，$\hat{\pi}$ は $[0,\bar{w}]$ で最大値をもつ．任意の $w \in [0,\underline{w}]$ について，

$$\hat{\pi}(w) = \eta\left(\int_{\underline{a}}^{\underline{a}} af(a)da\right)^{\delta} - w\int_{\underline{a}}^{\underline{a}} f(a)da = 0$$

が成立するので，ある $\hat{w} \in [\underline{w},\bar{w}] \subset \mathbb{R}_+$ が存在して，

$$\pi(R,\hat{w}) \geqq \pi(R,w), \quad \forall w \geqq 0$$

である．

A.2 補助定理 2 の証明

$x \overset{\text{def}}{=} (\iota,w,R,e)$ を $\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{+}\times\mathbb{R}_{++}\times(0,1]$ の任意の点とする．$x^{\nu} \overset{\text{def}}{=} (\iota^{\nu},w,R^{\nu},e^{\nu})$，$\nu=1,2,\ldots$ を x に収束する $\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{+}\times\mathbb{R}_{++}\times(0,1]$ 内の任意の列とする．$a(x^{\nu})$，$\nu=1,2,\ldots$ は $[\underline{a},\bar{a}]$ 内の列であるから，収束する部分列をとることができる．一般性を失うことなく，列 $a(x^{\nu})$，$\nu=1,2,\ldots$ 自身が収束する列であるとすることができる．

Step １：$A(x)=\emptyset$ の場合を考察する．

$$eV(R,\underline{a}) + (1-e)V(R,\underline{a}) > V(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$$

である．$V(\cdot)$ の連続性から，十分大きな任意の ν について，

$$e^{\nu}V(R^{\nu},a) + (1-e^{\nu})V(R^{\nu},\underline{a}) \geqq e^{\nu}V(R^{\nu},\underline{a}) + (1-e^{\nu})V(R^{\nu},\underline{a}) > V(\iota^{\nu}, I^{\mathrm{r}}(\iota^{\nu},w^{\nu})),\ \forall a \in [\underline{a},\bar{a}]$$

が成り立つ．よって，$A(x^{\nu})=\emptyset$ である．したがって，$\lim_{\nu\to\infty} a(x^{\nu}) = \underline{a} = a(x)$ である．

Step 2：$A(x)\neq\emptyset$ かつ有限個 (ゼロ個も許す) の ν について $A(x^{\nu})=\emptyset$ となっている場合を考察する．$a(x)=\sup A(x)$ である．a を $a<a(x)$ となる任意の実数とすれば，十分小さな任意の正の数 ϵ について，

$$eV(R,a+\epsilon) + (1-e)V(R,\underline{a}) < V(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota,w))$$

である．十分大きな任意の ν について，

$$e^{\nu}V(R^{\nu},a+\epsilon) + (1-e^{\nu})V(R^{\nu},\underline{a}) < V(\iota^{\nu}, I^{\mathrm{r}}(\iota^{\nu},w^{\nu}))$$

が成立する．よって，$a+\epsilon < a(x^{\nu})$ である．それゆえ，$a+\epsilon \leqq \lim_{\nu\to\infty} a(x^{\nu})$ である．したがって，

$$a(x) \leqq \lim_{\nu\to\infty} a(x^{\nu})$$

である．逆に，a を $a>a(x)$ となる任意の実数とすれば，

$$a(x) \geqq \lim_{\nu\to\infty} a(x^{\nu})$$

となる．以上によって，$\lim_{\nu\to\infty} a(x^\nu) = a(x)$ である．
Step 3：$A(x) \neq \emptyset$ かつ無限個の ν について $A(x^\nu) = \emptyset$ となっている場合を考察する．まず，$A(x) = \{\underline{a}\}$ であることを示そう．いま，ある $a \in (\underline{a}, \bar{a}]$ が存在して，$a \in A(x)$ が成立したとする．

$$eV(R,a) + (1-e)V(R,\underline{a}) \leqq V(\iota, I^{\mathrm{r}}(\iota, w))$$

である．ϵ を十分小さな正の数とすれば，$V(\cdot)$ の連続性から，十分大きな任意の ν について，

$$e^\nu V(R^\nu, a') + (1-e^\nu)V(R^\nu, \underline{a}) \leqq e^\nu V(R^\nu, a-\epsilon) + (1-e^\nu)V(R^\nu, \underline{a}) < V(\iota^\nu, I^{\mathrm{r}}(\iota^\nu, w^\nu)),\ \forall a' \in [\underline{a}, a-\epsilon]$$

が成立する．これは十分大きな任意の ν について，

$$[\underline{a}, a) \subset A(x^\nu)$$

を意味し，無限個の ν について $A(x^\nu) = \emptyset$ が成立することに矛盾する．よって，任意の $a \in (\underline{a}, \bar{a}]$ について，$a \notin A(x)$ である．いま $A(x) \neq \emptyset$ であるから，したがって，$A(x) = \{\underline{a}\}$ である．$a(x) = \sup A(x) = \underline{a}$ である．

サブケースに $A(x^\nu) \neq \emptyset$ を満たす ν が有限個であるという場合がある．このときには，ある番号 $\hat{\nu}$ より大きな ν については $A(x^\nu) = \emptyset$ であるので，$a(x^\nu) = \underline{a}$ がすべての $\nu > \hat{\nu}$ について成立する．よって，この場合は $\nu \to \infty$ のとき $a(x^\nu) \to \underline{a}$ は自明である．したがって，$A(x^\nu) \neq \emptyset$ を満たす ν が無限個である場合が問題である．$A(x^\nu) \neq \emptyset$ を満たす ν の集合を $F \overset{\text{def}}{=} \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \ldots\}$, $\nu_i < \nu_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ とする．$\nu_i \in F$ については，Step 2 と同じ議論を繰り返せば，

$$\lim_{i\to\infty} a(x^{\nu_i}) = a(x) = \underline{a}$$

である．一方，$\nu \notin F$ については，$A(x^\nu) = \emptyset$ であるから，$a(x^\nu) = \underline{a}$ が成立している．これらを総合すれば，$\lim_{\nu\to\infty} a(x^\nu) = \underline{a}$ である．

A.5 補助定理 3 の証明

$R^n \to R^* = 0$ (as $n \to \infty$) とする．このとき，結論を否定して，列 $c_2^{\mathrm{L}}(R^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ が無限大に発散しないとする．ある自然数 k が存在して，任意の番号 n について，ある番号 $n_0 \geqq n$ が存在して，$c_2^{\mathrm{L}}(R^{n_0}) \leqq k$ が成立する．それゆえ，$n = 1$ に対して，ある番号 $n_1 \geqq 1$ が存在して，$c_2^{\mathrm{L}}(R^{n_1}) \leqq k$ である．n_1+1 に対して，ある番号 $n_2 \geqq n_1+1$ が存在して，$c_2^{\mathrm{L}}(R^{n_2}) \leqq k$ である．n_2+1 に対して，ある番号 $n_3 \geqq n_2+1$ が存在して，$c_2^{\mathrm{L}}(R^{n_3}) \leqq k$ である．このような操作を繰り返していけば，列 $c_2^{\mathrm{L}}(R^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ の部分列 $c_2^{\mathrm{L}}(R^{n_i})$, $i = 1, 2, \ldots$ を得ることができる．需要ベクトルの列 $c^{\mathrm{L}n_i} \overset{\text{def}}{=} (c_1^{\mathrm{L}}(R^{n_i}), c_2^{\mathrm{L}}(R^{n_i}))$, $i = 1, 2, \ldots$ はコンパクト集合 $[0, \sup\{R^{n_i}(\Pi(R^{n_i}) - \bar{K}) + r\bar{K} \mid i = 1, 2, \ldots\}] \times [0, k]$ 内の列である．よって，ある点 $c^{\mathrm{L}*} \overset{\text{def}}{=} (c_1^{\mathrm{L}*}, c_2^{\mathrm{L}*})$ に収束する部分列をとることができる．一般性を失うことなく，列 $c^{\mathrm{L}n_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ 自身が収束する列であるとすることができる．効用関数に関する仮定 1 から，

$$c_1^{\mathrm{L}}(R^{n_i}) + R^{n_i} c_2^{\mathrm{L}}(R^{n_i}) = R^{n_i}(\Pi(R^{n_i}) - \bar{K}) + r\bar{K},\ i = 1, 2, \ldots$$

が成立するので,

$$c_1^{\mathrm{L}*} + R^* c_2^{\mathrm{L}*} = R^*(\Pi(R^*) - \bar{K}) + r\bar{K} > 0$$

が成立する．ここで，$(\hat{c}_1^{\mathrm{L}}, \hat{c}_2^{\mathrm{L}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (c_1^{\mathrm{L}*}, c_2^{\mathrm{L}*} + 1)$ とする．$R^* = 0$ であるので,

$$\hat{c}_1^{\mathrm{L}} + R^* \hat{c}_2^{\mathrm{L}} = R^*(\Pi(R^*) - \bar{K}) + r\bar{K} > 0$$

が成立する．また効用関数に関する仮定 1 から,

$$u^{\mathrm{L}}(\hat{c}_1^{\mathrm{L}}, \hat{c}_2^{\mathrm{L}}) > u^{\mathrm{L}}(c_1^{\mathrm{L}*}, c_2^{\mathrm{L}*})$$

である．よって，u^{L} の連続性から，ある $\lambda \in (0,1)$ が存在して,

$$\begin{aligned} &\lambda \hat{c}_1^{\mathrm{L}} + R^* \lambda \hat{c}_2^{\mathrm{L}} < R^*(\Pi(R^*) - \bar{K}) + r\bar{K} \\ &u^{\mathrm{L}}(\lambda \hat{c}_1^{\mathrm{L}}, \lambda \hat{c}_2^{\mathrm{L}}) > u^{\mathrm{L}}(c_1^{\mathrm{L}*}, c_2^{\mathrm{L}*}) \end{aligned}$$

が成立する．$R^{n_i} \to R^*$，$c_t^{\mathrm{L}n_i} \to c_t^{\mathrm{L}*}(\text{ as } i \to \infty)$，および u^{L} の連続性から，十分大きな i について,

$$\begin{aligned} &\lambda \hat{c}_1^{\mathrm{L}} + R^{n_i} \lambda \hat{c}_2^{\mathrm{L}} < R^{n_i}(\Pi(R^{n_i}) - \bar{K}) + r\bar{K} \\ &u^{\mathrm{L}}(\lambda \hat{c}_1^{\mathrm{L}}, \lambda \hat{c}_2^{\mathrm{L}}) > u^{\mathrm{L}}(c_1^{\mathrm{L}n_i}, c_2^{\mathrm{L}n_i}) \end{aligned}$$

が成立する．これは $c^{\mathrm{L}n_i}$ が価格 R^{n_i} のもとでの需要ベクトルであることに矛盾する．

A.3 定理 1 の証明

定理 1 の証明の前に，存在証明と本文との関係を明示しておく．まず，本文では表現を簡明にするために，第 1 期消費財を価値基準財として，その価格を 1 とした．存在証明では価格の正規化を異なったものにする必要があるために，それを採用していない．このような作業は正規化の問題であって，なんら問題はない．また，証明では次の点において本文と異なる．

(1) 本文の第 1 期消費財と第 2 期消費財の市場価格 $(1, R)$ は，証明では (p_1, p_2) になる．つまり，本文中では $R = p_2/p_1$ としている．

(2) 本文の賃金率 (w, a) は，証明では $(p_2 w, p_1 a)$ となる．

以上に留意したうえで，存在証明に入ろう．

労働者と地主の需要関数 c_t^{r}，c_t^{uj}，c_t^{un}，c_t^{L} が価格と所得に関して 0 次同次であること，$\hat{a}$ が価格と所得に関して 0 次同次であること，また利潤最大化問題の解 ι，w が価格に関して 0 次同次であることは容易に確認することができる．したがって，超過需要関数について，任意の $\lambda > 0$，任意の $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$ について,

$$z_l(\lambda p_1, \lambda p_2, e) = z_l(p_1, p_2, e),\ l = 1, 2, L$$

が成立する．そこで，$\lambda = 1/(p_1 + p_2)$ とすれば，

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda p_i = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i}{p_1 + p_2} = 1$$

となる．この性質に注目して，$S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid p_1 + p_2 = 1\}$ とするとき，超過需要関数の定義域を

$$S_2^{\square} \stackrel{\text{def}}{=} \{(p_1, p_2) \in S_2 \mid p_j > 0,\ j = 1, 2\}$$

に制限することができる．以下，3 段階に分けて証明を行う．

（Step 1）： 関数を拡張し，不動点定理を適用する．(p_1, p_2, e) を $S_2^{\square} \times (0, 1]$ の任意の要素とする．十分大きな正の数 ξ について，関数 $\psi(p_1, p_2, e) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_1(p_1, p_2, e),\ \psi_2(p_1, p_2, e),\ \psi_L(p_1, p_2, e))$ を

$$\begin{aligned}
\psi_1(p_1, p_2, e) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_1 + \mathrm{med}\{z_1(p_1, p_2, e), \xi, 0\}}{\beta_1} \\
\psi_2(p_1, p_2, e) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_2 + \mathrm{med}\{z_2(p_1, p_2, e), \xi, 0\}}{\beta_1} \\
\psi_L(p_1, p_2, e) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - \mu)e + \mu}{\beta_1} \\
\beta_1 &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \mathrm{med}\{z_1(p_1, p_2, e), \xi, 0\} + \mathrm{med}\{z_2(p_1, p_2, e), \xi, 0\} \\
\mu &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{med}\{z_L(p_1, p_2, e), \xi, 0\}}{1 + \mathrm{med}\{z_L(p_1, p_2, e), \xi, 0\}}
\end{aligned}$$

と定義する．$\psi : S_2^{\square} \times (0, 1] \to S_2 \times [0, 1]$ である．補助定理 2 および合成関数の連続性から，超過需要関数 $z_l(\cdot), l = 1, 2, L$ は $S_2^{\square} \times (0, 1]$ 上で連続である．それゆえ，$\psi_i, i = 1, 2, L$ は $S_2^{\square} \times (0, 1]$ 上で連続である．したがって，ψ は $S_2^{\square} \times (0, 1]$ 上の連続関数である．

ψ のグラフを G_ψ とかく．ここで，$S_2^{\square} \times (0, 1]$ は $S_2 \times [0, 1]$ の稠密部分集合であり，$S_2 \times [0, 1]$ はコンパクト集合である．G_ψ の閉包 $\bar{G}_\psi$ をとれば，$S_2 \times [0, 1]$ から $S_2 \times [0, 1]$ への閉対応

$$\bar{\psi}(p_1, p_2, e) = \{(p'_1, p'_2, e') \mid (p'_1, p'_2, e') \in S_2 \times [0, 1],\ ((p_1, p_2, e), (p'_1, p'_2, e')) \in \bar{G}_\psi\} \neq \emptyset$$

を定義することができる．さらに，各 $(p_1, p_2, e) \in S_2 \times [0, 1]$ に $\bar{\psi}(p_1, p_2, e)$ の凸包を対応させる対応 $\bar{\psi}_c$ を考えれば，$\bar{\psi}_c$ は ψ の拡張であり，上半連続である[16]．$\bar{\psi}_c(p_1, p_2, e)$ は非空，凸集合であり，$S_2 \times [0, 1]$ は非空，コンパクト，凸集合である．したがって，角谷の不動点定理によって，$\bar{\psi}_c$ は不動点をもつ．すなわち，ある組 $(p_1^*, p_2^*, e^*) \in S_2 \times [0, 1]$ が存在して，

$$(p_1^*, p_2^*, e^*) \in \bar{\psi}_c(p_1^*, p_2^*, e^*)$$

[16] Nikaido [24] の定理 4.8 および系 1 (pp.72-73)．

が成立する．

（Step 2）: 不動点 (p_1^*, p_2^*, e^*) が拡張された境界にないことを示す．結論を否定して $(p_1^*, p_2^*, e^*) \notin S_2^{\square} \times (0,1]$ であると仮定する．

Case 1 : $e^* = 0$ とする．$\bar{\psi}_c(p_1^*, p_2^*, e^*)$ は $\bar{\psi}(p_1^*, p_2^*, e^*)$ の凸包であるから，カラテオドリの定理[17]によって，$\bar{\psi}_c(p_1^*, p_2^*, e^*)$ の点はたかだか 4 個の $\bar{\psi}(p_1^*, p_2^*, e^*)$ の点の凸結合である．したがって，ある $(p_1^i, p_2^i, e^i) \in \bar{\psi}(p_1^*, p_2^*, e^*)$, $i = 1,2,3,4$ が存在して，

$$\begin{aligned} p_1^* &= \lambda_1 p_1^1 + \lambda_2 p_1^2 + \lambda_3 p_1^3 + \lambda_4 p_1^4 \\ p_2^* &= \lambda_1 p_2^1 + \lambda_2 p_2^2 + \lambda_3 p_2^3 + \lambda_4 p_2^4 \\ 0 &= e^* = \lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \lambda_3 e^3 + \lambda_4 e^4 \\ \sum_{i=1}^{4} &\lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqq 0 \end{aligned}$$

が成立する．ここで，$e^i \in [0,1]$, $i = 1,2,3,4$ であるから，ある $j \in \{1,2,3,4\}$ が存在して，$e^j = 0$ である．$\bar{G}_\psi$ は G_ψ の閉包であり，$((p_1^*, p_2^*, e^*), (p_1^j, p_2^j, e^j)) \in \bar{G}_\psi$ であるから，ある列 $((p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm}), \psi(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm})) \in G_\psi$, $m = 1,2,\ldots$ が存在して，

$$(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm}) \to (p_1^*, p_2^*, 0) \quad \text{かつ} \quad \psi(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm}) \to (p_1^j, p_2^j, 0) \quad \text{as } m \to \infty$$

が成立する．いま，価格と雇用率が $p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm}$ のときの都市労働需要を $L^{\mathrm{d}}(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm})$ とかけば，

$$L^{\mathrm{d}}(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm}) = \frac{\alpha}{\beta}\bar{K},\ m = 1,2,\ldots$$

である．よって，

$$\lim_{m\to\infty} L^{\mathrm{d}}(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm}) = \frac{\alpha}{\beta}\bar{K}$$

である．一方，価格と雇用率が $p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm}$ のときの都市労働供給を $L^{\mathrm{s}}(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm})$ とかけば，

$$L^{\mathrm{s}}(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm}) = e^{jm} \int_{a(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm})}^{\bar{a}} a f(a) \mathrm{d}a,\ m = 1,2,\ldots$$

である．ここで，

$$0 = \int_{\bar{a}}^{\bar{a}} a f(a) \mathrm{d}a \leqq \int_{a(p_1^{jm}, p_2^{jm}, e^{jm})}^{\bar{a}} a f(a) \mathrm{d}a \leqq \int_{\underline{a}}^{\bar{a}} a f(a) \mathrm{d}a,\ m = 1,2,\ldots$$

[17] Rockafellar [25] の THEOREM 17.1 (p.155) を参照されたい．

であるから，列 $\int_{a(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm})}^{\bar{a}} af(a)\mathrm{d}a,\ m=1,2,\ldots$ は有界である．よって，

$$\lim_{m\to\infty} L^{\mathrm{s}}(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm})=0$$

である．したがって，

$$\lim_{m\to\infty} z_L(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm})=\lim_{m\to\infty}[L^{\mathrm{d}}(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm})-L^{\mathrm{s}}(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm})]=\frac{\alpha}{\beta}\bar{K}$$

が得られる．これは

$$\begin{aligned}0=e^j&=\lim_{m\to\infty}\psi_1(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm})\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{(1-\mu(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm}))e^{jm}+\mu(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm})}{\beta_1(p_1^{jm},p_2^{jm},e^{jm})}\\&\geqq\frac{\frac{\alpha}{\beta}\bar{K}}{(1+\frac{\alpha}{\beta}\bar{K})(1+2\xi)}>0\end{aligned}$$

となって矛盾である．したがって，$e^*\neq 0$ でなければならない．
<u>Case 2</u> ：$p_1^*=0$ とする．<u>Case 1</u> の証明の前半部分と同様の議論を繰り返せば，

$$(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})\to(0,p_2^*,e^*)\ \text{ かつ }\ \psi(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})\to(0,p_2^k,e^k)\ \text{ as } m\to\infty$$

を満たす列 $((p_1^{km},p_2^{km},e^{km}),\psi(p_1^{km},p_2^{km},e^{km}))\in G_\psi,\ m=1,2,\ldots$ をとることができる．価格と雇用率が $(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})$ のときの第 1 期消費財の供給を $S_1(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})$ とかけば，

$$\begin{aligned}\frac{\bar{K}}{\beta}=\frac{\bar{K}}{\beta}+\underline{a}\int_{\bar{a}}^{\bar{a}}f(a)\mathrm{d}a\leqq S_1(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})&\\=\frac{\bar{K}}{\beta}+(1-e^{km})\underline{a}\int_{a(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})}^{\bar{a}}f(a)\mathrm{d}a&\\\leqq\frac{\bar{K}}{\beta}+\underline{a}\int_{\underline{a}}^{\bar{a}}f(a)\mathrm{d}a,\quad m=1,2,\ldots&\end{aligned}$$

であるから，列 $S_1(p_1^{km},p_2^{km},e^{km}),\ m=1,2,\ldots$ は有界である．一方，価格と雇用率が $(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})$ のときの第 1 期消費財の需要を $D_1(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})$ とかけば，補助定理 3 より，列

$$\begin{aligned}D_1(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})=&c_1^{\mathrm{L}}(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})+c_1^{\mathrm{r}}(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})\int_{\underline{a}}^{a(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})}f(a)\mathrm{d}a\\&+e^{km}\int_{a(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})}^{\bar{a}}c_1^{\mathrm{uj}}(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})f(a)\mathrm{d}a\\&+(1-e^{km})c_1^{\mathrm{un}}(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})\int_{a(p_1^{km},p_2^{km},e^{km})}^{\bar{a}}f(a)\mathrm{d}a,\ m=1,2,\ldots\end{aligned}$$

は無限大に発散する．したがって，

$$\lim_{m\to\infty} z_1(p_1^{km}, p_2^{km}, e^{km}) = \lim_{m\to\infty} D_1(p_1^{km}, p_2^{km}, e^{km}) - S_1(p_1^{km}, p_2^{km}, e^{km}) = \infty$$

が得られる．これは，

$$\begin{aligned} 0 = p_1^k &= \lim_{m\to\infty} \frac{p_1^{km} + \mathrm{med}\{z_1(p_1^{km}, p_2^{km}, e^{km}), \xi, 0\}}{\beta_1(p_1^{km}, p_2^{km}, e^{km})} \\ &\geqq \frac{\xi}{1+2\xi} > 0 \end{aligned}$$

となって矛盾である．したがって，$p_1^* \neq 0$ でなければならない．
Case 3 ：$p_2^* = 0$ とする． Case 2 と同様の議論を繰り返すことによって，矛盾を導き出すことができる．

(Step 3)：不動点で市場均衡が存在することを示す．つまり，$z_l(p_1^*, p_2^*, e^*) = 0,\ l = 1, 2, L$ が成立することを示す．ワルラス法則から，

$$p_1^* z_1(p_1^*, p_2^*, e^*) + p_2^* z_2(p_1^*, p_2^*, e^*) + p_1^* z_L(p_1^*, p_2^*, e^*) = 0$$

が成立する．Step 2 より，$p_1^* > 0,\ p_2^* > 0$ であるので，ある財 $j \in \{1, 2, L\}$ が存在して，$z_j(p_1^*, p_2^*, e^*) \leqq 0$ である．
Case A ：$j = 1$ とする．$\mathrm{med}\{z_1(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} = 0$ である．それゆえ，

$$p_1^* = \frac{p_1^*}{\beta_1}$$

が成立する．$\beta_1 = 1$ つまり，

$$\mathrm{med}\{z_2(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} = \mathrm{med}\{z_1(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} + \mathrm{med}\{z_2(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} = 0$$

である．よって，

$$z_2(p_1^*, p_2^*, e^*) \leqq 0$$

が成り立つ．また，$\beta_1 = 1$ より，

$$e^* = (1-\mu)e^* + \mu$$

である．Step 2 より $e^* \neq 0$ であるから，$\mu = 0$ つまり

$$\mathrm{med}\{z_L(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} = 0$$

が成立する．よって，

$$z_L(p_1^*, p_2^*, e^*) \leqq 0$$

が成り立つ．

Case B ：$j=2$ とする． Case A と同様の議論を繰り返せば,

$$z_l(p_1^*, p_2^*, e^*) \leqq 0,\ l=1,L$$

を得る．

Case C ：$j=L$ とする．$\mathrm{med}\{z_L(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\}=0$ である．それゆえ，$\mu=0$ であるから，

$$e^* = \frac{e^*}{\beta_1}$$

が成立する．$\beta_1=1$ つまり，

$$\mathrm{med}\{z_1(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} + \mathrm{med}\{z_2(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} = 0$$

である．いま $\mathrm{med}\{z_1(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} \geqq 0$ かつ $\mathrm{med}\{z_2(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} \geqq 0$ であるから，

$$\mathrm{med}\{z_l(p_1^*, p_2^*, e^*), \xi, 0\} = 0,\ l=1,2$$

でなければならない．よって，

$$z_l(p_1^*, p_2^*, e^*) \leqq 0,\ l=1,2$$

が成り立つ．

以上より，任意の $l=1,2,L$ について

$$z_l(p_1^*, p_2^*, e^*) \leqq 0$$

である．ワルラス法則と，Step 2 より $p_1^*>0$，$p_2^*>0$ であることから，

$$0 = p_1^* z_1(p_1^*, p_2^*, e^*) + p_2^* z_2(p_1^*, p_2^*, e^*) + p_1^* z_L(p_1^*, p_2^*, e^*) \leqq 0$$

が成立する．したがって，

$$z_l(p_1^*, p_2^*, e^*) = 0,\ l=1,2,L$$

を得る．これは市場均衡価格と失業率 $(p_1^*, p_2^*, 1-e^*)$ が存在することを意味する．

A.4 比較静学

$\mathbb{R}_{++}\times(0,1]\times\mathbb{R}_{++}\times(0,1)\times(0,1)\times\mathbb{R}_{++}\times(0,1)\times\mathbb{R}_{++}$ 上で定義される実数値関数 h_1，h_2 を

$$h_1(x) \overset{\mathrm{def}}{=} e - \frac{\delta}{2}\eta^{\frac{1}{\delta}} R^{\frac{1}{\delta}} \left(\left(\frac{1-\gamma}{\beta\gamma}+R\right)\bar{K}\right)^{-\frac{1-\delta}{\delta}}$$

$$h_2(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\alpha}{\beta}\bar{K} - \frac{\delta}{2}\eta^{\frac{1}{\delta}} R^{\frac{1}{\delta}} \left(\left(\frac{1-\gamma}{\beta\gamma}+R\right)\bar{K}\right)^{-\frac{1-\delta}{\delta}} \frac{1}{2\epsilon} + \frac{\delta}{2}\left(\frac{1-\gamma}{\beta\gamma}+R\right)\bar{K}$$

と定義する．ただし，$x \overset{\text{def}}{=} (R, e, \bar{K}, \alpha, \beta, \epsilon, \gamma, \eta)$ である．ある $\tilde{x} \overset{\text{def}}{=} (\tilde{R}, \tilde{e}, \tilde{\bar{K}}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\eta})$ において，

$$h_i(\tilde{x}) = 0, \ \ i = 1, 2 \tag{18}$$

が成立すると仮定する．さらに，

$$|J(\tilde{x})| \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} h_{11}(\tilde{x}) & h_{12}(\tilde{x}) \\ h_{21}(\tilde{x}) & h_{22}(\tilde{x}) \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立すると仮定する．ただし，

$$h_{11}(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial h_1}{\partial R}(\tilde{x}) = -\frac{\tilde{\bar{K}}}{2}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1} + \delta\right) < 0 \tag{19}$$

$$h_{12}(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial h_1}{\partial e}(\tilde{x}) = 1 \tag{20}$$

$$\begin{aligned} h_{21}(\tilde{x}) &\overset{\text{def}}{=} \frac{\partial h_2}{\partial R}(\tilde{x}) \\ &= -\frac{\tilde{\bar{K}}}{2}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1} + \delta\right)\frac{1}{2\tilde{\epsilon}} + \frac{\delta}{2}\tilde{\bar{K}} \\ &< -\frac{\tilde{\bar{K}}}{2}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1} + \delta\right)\left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}\right)^{\frac{1}{\delta}} + \frac{\delta}{2}\tilde{\bar{K}} \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{\bar{K}}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1} < 0 \end{aligned} \tag{21}$$

$$h_{22}(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial h_2}{\partial e}(\tilde{x}) = 0 \tag{22}$$

である．ただし，(21) の 3 行目の不等号は市場均衡では $a(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \neq \bar{a}$ が成立するから，

$$\int_{a(\iota(R,e),w(R,e),R,e)}^{\bar{a}} af(a)\mathrm{d}a = \frac{1}{2\epsilon} - \left(\frac{\delta\tilde{\eta}R}{2e}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} > 0 \tag{23}$$

となること，および (18) より $h_1(\tilde{x}) = 0$ が成立することを用いている．

このとき，陰関数定理によって，$\tilde{y} \overset{\text{def}}{=} (\tilde{\bar{K}}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\eta})$ を中心とする開球 $B_a(\tilde{y})$ と $(\tilde{R}, \tilde{e})$ を中心とする開球 $B_b(\tilde{R}, \tilde{e})$ と 2 つの連続関数からなるベクトル関数 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ が存在して，

$$\phi : y \in B_a(\tilde{y}) \mapsto (\phi_1(y), \phi_2(y)) \in B_b(\tilde{R}, \tilde{e})$$

であり，任意の $y \overset{\text{def}}{=} (\bar{K}, \alpha, \beta, \epsilon, \gamma, \eta) \in B_a(\tilde{y})$ について，

$$h_i(\phi_1(y), \phi_2(y), y) = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{24}$$

かつ

$$(\phi_1(\tilde{y}), \phi_2(\tilde{y})) = (\tilde{R}, \tilde{e})$$

が成立する．(24) は $\bar{K}, \alpha, \beta, \epsilon, \gamma, \eta$ についての恒等式である．合成関数の微分を用いて，(24) を $\bar{K}$ について微分して，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{K}} + \left[-\frac{\tilde{\bar{K}}}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) \tilde{\bar{K}} \right)^{-\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} \tilde{R}^{-1} + \delta \right) \right] \times \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{K}} \\
&\quad + \frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) \tilde{\bar{K}} \right)^{-\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{\tilde{\bar{K}}}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) \tilde{\bar{K}} \right)^{-\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} \tilde{R}^{-1} + \delta \right) \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} + \frac{\delta}{2}\tilde{\bar{K}} \right] \times \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{K}} \\
&+ \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) \tilde{\bar{K}} \right)^{-\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) = 0
\end{aligned}$$

である．よって，(19)～ (22) を考慮すれば，

$$\begin{bmatrix} h_{11}(\tilde{x}) & h_{12}(\tilde{x}) \\ h_{21}(\tilde{x}) & h_{22}(\tilde{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \bar{K}}(\tilde{y}) \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \bar{K}}(\tilde{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\tilde{x}) \\ B(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

を得る．ただし，

$$\begin{aligned}
A(\tilde{x}) &\overset{\text{def}}{=} -\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) \tilde{\bar{K}} \right)^{-\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) \\
B(\tilde{x}) &\overset{\text{def}}{=} -\left[\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} - \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} A(\tilde{x}) + \frac{\delta}{2} \left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R} \right) \right]
\end{aligned}$$

である．$h_{11}B - h_{21}A > 0$ より，クラメールの公式を用いれば，

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{K}}(\tilde{y}) = \frac{B(\tilde{x})}{h_{21}(\tilde{x})} > 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{K}}(\tilde{y}) = \frac{h_{11}(\tilde{x})B(\tilde{x}) - h_{21}(\tilde{x})A(\tilde{x})}{-h_{21}(\tilde{x})} > 0$$

を得る．

同様にして，(24) をそれぞれ α，β，ϵ，γ および η について微分すれば，以下を得る．

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha}(\tilde{y}) = \frac{\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\beta}}}{-h_{21}(\tilde{x})} > 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha}(\tilde{y}) = \frac{h_{11}(\tilde{x})\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\beta}}}{h_{21}(\tilde{x})} > 0 \tag{25}$$

である．$h_{11}D - Ch_{21} < 0$ より，

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \beta}(\tilde{y}) = \frac{D(\tilde{x})}{h_{21}(\tilde{x})} < 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta}(\tilde{y}) = \frac{h_{11}(\tilde{x})D(\tilde{x}) - C(\tilde{x})h_{21}(\tilde{x})}{-h_{21}(\tilde{x})} < 0$$

である．ただし，

$$C(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{(1-\tilde{\gamma})(1-\delta)}{2\tilde{\beta}^2\tilde{\gamma}}\tilde{\bar{K}}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}\right)^{-\frac{1}{\delta}}, \ D(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}^2}\tilde{\bar{K}} + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}}C(\tilde{x}) + \frac{\delta(1-\tilde{\gamma})}{2\tilde{\beta}^2\tilde{\gamma}}\tilde{\bar{K}}$$

である．

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \epsilon}(\tilde{y}) = \frac{E(\tilde{x})}{h_{21}(\tilde{x})} > 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \epsilon}(\tilde{y}) = \frac{h_{11}(\tilde{x})E(\tilde{x})}{-h_{21}(\tilde{x})} > 0 \tag{26}$$

である．ただし，

$$E(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} -\frac{\delta}{4\tilde{\epsilon}^2}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}$$

である．$h_{11}G - Fh_{21} < 0$ より，

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \gamma}(\tilde{y}) = \frac{G(\tilde{x})}{h_{21}(\tilde{x})} < 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \gamma}(\tilde{y}) = \frac{h_{11}(\tilde{x})G(\tilde{x}) - F(\tilde{x})h_{21}(\tilde{x})}{-h_{21}(\tilde{x})} < 0$$

である．ただし，

$$F(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1-\delta}{2\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2}\tilde{\bar{K}}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}\right)^{-\frac{1}{\delta}}, \ G(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\tilde{\epsilon}}F(\tilde{x}) + \frac{\delta}{2\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2}\tilde{\bar{K}}$$

である．$h_{11}I - Hh_{21} < 0$ より，

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}(\tilde{y}) = \frac{I(\tilde{x})}{h_{21}(\tilde{x})} < 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta}(\tilde{y}) = \frac{h_{11}(\tilde{x})I(\tilde{x}) - H(\tilde{x})h_{21}(\tilde{x})}{-h_{21}(\tilde{x})} < 0 \tag{27}$$

である．ただし，

$$H(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\tilde{\eta}}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}\tilde{R}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}\right)^{-\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + \tilde{R}\right)\tilde{\bar{K}}, \ I(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\tilde{\epsilon}}H(\tilde{x})$$

である．

さて，任意の $y \in B_a(\tilde{y})$ について (24) が成立することから，(13)，(14) および補助定理 1 を考慮すれば，

$$\begin{aligned} a(\iota(\phi_1(y), \phi_2(y)), w(\phi_1(y), \phi_2(y)), \phi_1(y), \phi_2(y)) &= \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}\left(\frac{\bar{K}}{\eta}\left(\frac{1-\gamma}{\beta\gamma}\phi_1(y)^{-1} + 1\right)\right)^{\frac{1}{2\delta}} \\ &\equiv a(y) \end{aligned} \tag{28}$$

である．(28) は $\bar{K}, \alpha, \beta, \epsilon, \gamma, \eta$ の恒等式である．(28) を $\bar{K}$ について微分して，

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{K}}(\tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}}\delta\tilde{\bar{K}}}\left(\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{\frac{1}{2\delta}}\left[1-\tilde{\bar{K}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{K}}(\tilde{y})\right]$$

である．(28) を α で微分して，

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha}(\tilde{y}) = -\frac{1}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}}\delta}\left(\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\eta}}\right)^{\frac{1}{2\delta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{\frac{1}{2\delta}-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha}(\tilde{y}) < 0$$

である．不等号は (25) よりしたがう．(28) を β について微分して，

$$\frac{\partial a}{\partial \beta}(\tilde{y}) = -\frac{1}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}}\delta}\left(\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\eta}}\right)^{\frac{1}{2\delta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{\frac{1}{2\delta}-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}^2\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}\left[1+\tilde{\beta}\tilde{R}^{-1}\frac{\partial \phi_1}{\partial \beta}(\tilde{y})\right]$$

である．(28) を ϵ について微分して，

$$\frac{\partial a}{\partial \epsilon}(\tilde{y}) = -\frac{1}{\tilde{\epsilon}\delta\sqrt{2\tilde{\epsilon}}}\left(\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{\frac{1}{2\delta}}\left[\delta+\tilde{\epsilon}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \epsilon}(\tilde{y})\right] < 0$$

である．不等号は (26) よりしたがう．(28) を γ について微分して，

$$\frac{\partial a}{\partial \gamma}(\tilde{y}) = -\frac{1}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}}\delta}\left(\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\eta}}\right)^{\frac{1}{2\delta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{\frac{1}{2\delta}-1}\frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2}\tilde{R}^{-1}\left[1+(1-\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}\tilde{R}^{-1}\frac{\partial \phi_1}{\partial \gamma}(\tilde{y})\right]$$

である．(28) を η について微分して，

$$\frac{\partial a}{\partial \eta}(\tilde{y}) = -\frac{1}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}}\delta\tilde{\eta}}\left(\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{\frac{1}{2\delta}}\left[1+\tilde{\eta}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}(\tilde{y})\right]$$

である．

任意の $y \in B_a(\tilde{y})$ について (24) が成立するので，(14) から，

$$\begin{aligned} w(\phi_1(y), \phi_2(y)) &= \frac{\delta\eta}{\sqrt{2\epsilon}}\left(\frac{\bar{K}}{\eta}\left(\frac{1-\gamma}{\beta\gamma}\phi_1(y)^{-1}+1\right)\right)^{-\frac{1-2\delta}{2\delta}} \\ &\equiv w(y) \end{aligned} \tag{29}$$

である．(29) は $\bar{K}, \alpha, \beta, \epsilon, \gamma, \eta$ の恒等式である．(29) を $\bar{K}$ について微分して，

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{K}}(\tilde{y}) = &-\frac{1-2\delta}{2\sqrt{2\tilde{\epsilon}}}\left(\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\eta}}\right)^{-1}\left(\frac{\tilde{\bar{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{-\frac{1-2\delta}{2\delta}} \\ &\times\left[1-\tilde{\bar{K}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{K}}(\tilde{y})\right] \end{aligned}$$

である．(29) を α について微分して，

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha}(\tilde{y}) = \frac{(1-2\delta)\tilde{\tilde{K}}}{2\sqrt{2\tilde{\epsilon}}}\left(\frac{\tilde{\tilde{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{-\frac{1}{2\delta}}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha}(\tilde{y}) > 0$$

である．不等号は (25) と $\delta \in (0, 1/2)$ よりしたがう．(29) を β について微分して，

$$\frac{\partial w}{\partial \beta}(\tilde{y}) = \frac{(1-2\delta)\tilde{\tilde{K}}}{2\sqrt{2\tilde{\epsilon}}}\left(\frac{\tilde{\tilde{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{-\frac{1}{2\delta}}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}^2\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}\left[1+\tilde{\beta}\tilde{R}^{-1}\frac{\partial \phi_1}{\partial \beta}(\tilde{y})\right]$$

である．(29) を ϵ について微分して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \epsilon}(\tilde{y}) = &-\frac{\tilde{\eta}}{2\tilde{\epsilon}\sqrt{2\tilde{\epsilon}}}\left(\frac{\tilde{\tilde{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{-\frac{1-2\delta}{2\delta}} \\ &\times\left[\delta-\tilde{\epsilon}(1-2\delta)\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \epsilon}(\tilde{y})\right] > 0\end{aligned}$$

である．不等号は [ ] の中が負値であることと $\delta \in (0, 1/2)$ であることからしたがう．つまり，

$$\begin{aligned}&\delta-\tilde{\epsilon}(1-2\delta)\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \epsilon}(\tilde{y}) \\ &<\delta-\tilde{\epsilon}(1-2\delta)\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2} \\ &\quad\left(-\frac{1}{\tilde{\epsilon}(1-2\delta)}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\tilde{\tilde{K}}+\frac{\delta}{2}\tilde{\tilde{K}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}+\tilde{R}\right)\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\tilde{\tilde{K}}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}\right)^{-1} \\ &<\delta-\tilde{\epsilon}(1-2\delta)\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\delta}{\tilde{\epsilon}(1-2\delta)}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}+\tilde{R}\right)\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}\right)^{-1} = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，１番目の不等号は (18) より $h_2(\tilde{x}) = 0$ が成立すること，(21) および $\delta \in (0, 1/2)$ を用いている．(29) を γ について微分して，

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma}(\tilde{y}) = \frac{(1-2\delta)\tilde{\tilde{K}}}{2\sqrt{2\tilde{\epsilon}}}\left(\frac{\tilde{\tilde{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{-\frac{1}{2\delta}}\frac{1}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2}\tilde{R}^{-1}\left[1+(1-\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}\tilde{R}^{-1}\frac{\partial \phi_1}{\partial \gamma}(\tilde{y})\right]$$

である．(29) を η について微分して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \eta}(\tilde{y}) = &\frac{1}{2\sqrt{2\tilde{\epsilon}}}\left(\frac{\tilde{\tilde{K}}}{\tilde{\eta}}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)\right)^{-\frac{1-2\delta}{2\delta}} \\ &\times\left[1+(1-2\delta)\tilde{\eta}\left(\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-1}+1\right)^{-1}\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\tilde{R}^{-2}\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}(\tilde{y})\right]\end{aligned}$$

である．